

Partage équitab

Hugo et ses 11 amis ont récupéré 109
pour son anniversaire

Les 12 amis se disputent pour le

Hugo dit alors : "je me sacrifie. partage
les chocolats équitablement. je prends
reste

Que penser de son sac

Exercices : 1 et 2

Mercrredi

ARITHMÉTIQUE

I. Nombres entiers naturels et division euclidienne

1. Nombres entiers naturels

Définition : Les nombres entiers naturels sont des nombres servant à dénombrer des objets.

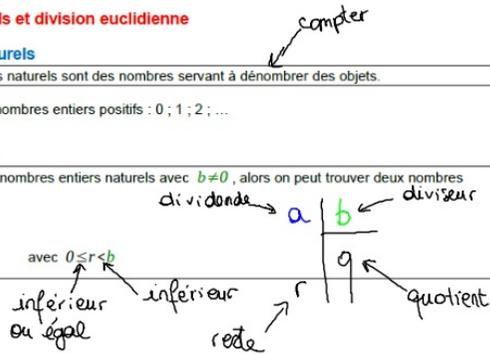
Cet ensemble est composé des nombres entiers positifs : 0 ; 1 ; 2 ; ...

2. Division euclidienne

Propriété : Si a et b sont deux nombres entiers naturels avec $b \neq 0$, alors on peut trouver deux nombres

q et r tels que :

$$a = b \times q + r$$



Exemple

exercice 1 p 127 :

$$\begin{array}{r|l} 138 & 5 \\ -10 & 27 \\ \hline & 38 \\ -35 & \\ \hline & 03 \end{array}$$

$$138 = 5 \times 27 + 3$$

$$\begin{array}{r|l} 192 & 6 \\ -18 & 32 \\ \hline & 12 \\ -12 & \\ \hline & 00 \end{array}$$

$$192 = 6 \times 32 + 0 = 6 \times 32$$

$$\begin{array}{r|l} 369 & 15 \\ -30 & 24 \\ \hline & 9 \\ -6 & \\ \hline & 09 \end{array}$$

$$369 = 15 \times 24 + 9$$

1. Effectuer la division euclidienne :

a. de 138 par 5.

b. de 192 par 6.

c. de 369 par 15.

2. Parmi les divisions ci-dessus, quelle est celle dont le reste est nul ?

3. Diviseurs et multiples

Définition : Lorsque le reste de la division euclidienne d'un entier a par un entier b différent de 0 est nul ($r=0$) on peut écrire $a=b \times q + 0 = b \times q$

On dit alors que a est un multiple de b (ou que b a pour multiple a).

On dit également que b est un diviseur de a (ou que a est divisible par b).

Exemple Dans l'exercice 1, on avait

$$192 = 6 \times 32 + 0 = 6 \times 32$$

Donc 192 est un multiple de 6

6 est un diviseur de 192

Remarque

- zéro ne divise aucun nombre
- tout nombre est un multiple de 1
- tout nombre entier est divisible par 1 et par lui-même.

page 127

2 Jules et Jim ont effectué la division euclidienne de 126 par 15 :

Jules

$$126 = 7 \times 15 + 21$$

Jim

$$126 = 15 \times 8 + 6$$

- Vérifier que les deux égalités sont vraies.
- Peut-on conclure que Jules et Jim ont tous les deux raison ?

a)

$$\begin{array}{r} 126 \\ -17 \\ \hline 156 \\ -56 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 7 \\ 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 126 \\ -120 \\ \hline 006 \end{array} \quad \begin{array}{l} 15 \\ 8 \end{array}$$

C'est l'opération de Jim qui est vraie.

11 Le diviseur d'une division euclidienne est 12 et le dividende 77.

► Quel est le quotient ? Le reste ?

$$\begin{array}{r|l} 12 & 77 \\ -72 & \\ \hline & 05 \end{array} \quad \text{Le reste est 5 et le quotient 6}$$

12 6 amis se partagent équitablement un paquet de 245 bonbons.

► Combien chacun reçoit-il de bonbons ?

Combien en reste-t-il ?

$$\begin{array}{r|l} 6 & 245 \\ -24 & \\ \hline & 05 \end{array} \quad \text{Chacun reçoit 40 bonbons et il reste 5.}$$

26 1. Un fleuriste souhaite répartir 81 roses en bouquets de trois roses.

a. Combien fera-t-il de bouquets ?
 b. Restera-t-il des roses ?

2. Répondre aux mêmes questions si le fleuriste a 82 roses à répartir.



p 130.

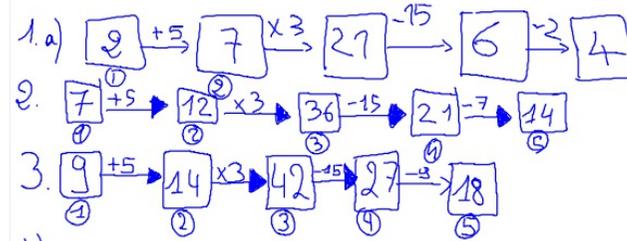
a) Il en fera 27. |
$$\begin{array}{r} 27 \\ 3 \overline{) 81} \\ \underline{60} \\ 21 \\ \underline{21} \\ 0 \end{array}$$

b) non, 1

29 p 13

- 1 Choisir un nombre.
- 2 Ajouter 5 à ce nombre.
- 3 Multiplier le résultat par 3.
- 4 Retrancher 15 au résultat. *soustraire*
- 5 Retrancher à ce résultat le nombre choisi au départ.

1. a. Appliquer ce programme de calcul à 2, à 7, puis à 9.
 b. Que peut-on conjecturer ?
 2. Jérôme a trouvé 16.
 Quel nombre a-t-il choisi au départ ?



b) Le nombre obtenu semble toujours être le double du nombre de départ (c'est une hypothèse).

$16 : 2 = 8$ conjecture

$8 + 5 = 13$
 $13 \times 3 = 39$
 $39 - 15 = 24$
 $24 - 8 = 16$ l'hypothèse est vérifiée pour Jérôme

14 Combien vaut le reste de la division euclidienne de 51 par 4 ?

$$\begin{array}{r} 51 \overline{) 4} \\ \underline{-4} \\ 11 \\ \underline{-8} \\ 03 \end{array}$$

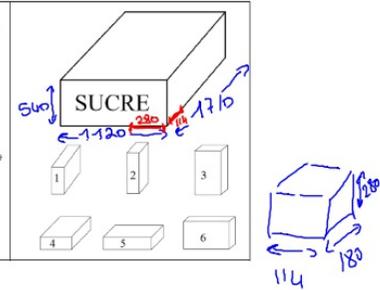
reste 3 dans la division euclidienne de 51 par 4

Activité 2 : Boîte à sucre

Les dimensions de l'intérieur d'une boîte à sucre de 1 kg sont : 17,1 cm ; 11,2 cm et 5,4 cm.

Les dimensions d'un morceau de sucre sont : 1,14 cm ; 1,8 cm et 2,8 cm. Les morceaux de sucre peuvent être posés dans l'une des six positions dessinées.

Indique dans une des six positions de sucre de façon optimale. Explique ton choix.



Combien de fois "rentre" 180 dans 1710 ?

$$\begin{array}{r} 1710 \overline{) 180} \\ \underline{-1620} \\ 90 \end{array} \quad \begin{array}{l} 9 \text{ sucres rentrent et il reste } 90 \text{ de vide} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1710 \overline{) 114} \\ \underline{-0} \\ 114 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1710 \overline{) 280} \\ \underline{-1680} \\ 30 \end{array}$$

On fait de même avec 1120

$$\begin{array}{r} 1120 \overline{) 180} \\ \underline{-1080} \\ 040 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1120 \overline{) 280} \\ \underline{-1120} \\ 0000 \end{array}$$

On vérifie que le reste de la division euclidienne de 540 par 180 est nul.

$$\begin{array}{r} 540 \overline{) 180} \\ \underline{540} \\ 0 \end{array}$$

127.

- 3 a. 369 est-il un multiple de 15 ?
b. 6 est-il un diviseur de 192 ?
c. Donner la liste des diviseurs de 24.
d. Donner la liste des diviseurs de 72.

a)
$$\begin{array}{r|l} 369 & 15 \\ -30 & \\ \hline 69 & 24 \\ -60 & \\ \hline 9 & \end{array}$$
 Non car le reste n'est pas nul.

b.
$$\begin{array}{r|l} 192 & 6 \\ -18 & \\ \hline 12 & 32 \\ -12 & \\ \hline 0 & \end{array}$$
 Oui 6 est un diviseur de 192 car le reste est nul.

- 3 a. 369 est-il un multiple de 15 ?
b. 6 est-il un diviseur de 192 ?
c. Donner la liste des diviseurs de 24.
d. Donner la liste des diviseurs de 72.

a. Non car
$$\begin{array}{r|l} 369 & 15 \\ & 9 \\ \hline & \end{array}$$
 le reste n'est pas nul

b.
$$\begin{array}{r|l} 192 & 6 \\ 0 & 32 \end{array}$$
 Oui car le reste est nul

c.
$$\begin{aligned} 24 &= 1 \times 24 \\ &= 2 \times 12 \\ &= 3 \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c) \quad 24 &= 1 \times 24 \\
 &= 2 \times 12 \\
 &= 3 \times 8 \\
 &= 4 \times 6
 \end{aligned}$$

diviseurs: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

$$\begin{aligned}
 d) \quad 72 \times 1 &= 72 \\
 2 \times 36 \\
 3 \times 24 \\
 4 \times 18 \\
 6 \times 12 \\
 8 \times 9
 \end{aligned}$$

- 4 Un musée organise des visites guidées pour une école. Les élèves sont répartis en groupes, éventuellement inégaux. Tous les groupes comptent entre 20 et 24 enfants.
 ▶ Donner trois répartitions possibles pour les 158 élèves de l'école.

$$3 \times 23 + 4 \times 22 + 2 \times 24$$

$$\begin{array}{r|l}
 158 & 20 \\
 \dots & 7 \\
 \hline
 18 &
 \end{array}$$

7 groupes de 20 élèves
 On répartit les 18 élèves restants dans les 7 groupes.

15 a. Le périmètre d'un carré de côté 6 est-il un multiple de 18 ?

b. Le périmètre d'un rectangle de longueur 4 et de largeur 3,5 est-il divisible par 5 ?

a) périmètre d'un carré = $4 \times \text{côté}$
 $= 4 \times 6$
 $= 24$

24 n'est pas divisible par 18.

b) $4 + 4 + 3,5 + 3,5 = 15$

ou
 $4 \times 2 = 8$

$3,5 \times 2 = 7$

$8 + 7 = 15$

$$\begin{array}{r} 15 \overline{) 15} \\ - 15 \\ \hline 0 \end{array}$$

le périmètre de ce rectangle est divisible par 5.

20 La somme de deux nombres pairs est-elle un nombre pair ?

Un nombre pair peut se décomposer $\underline{2 \times n}$

$\underline{2 \times a}$ ← le premier nombre pair

$\underline{2 \times b}$ ← le deuxième pair

$$\underline{2 \times a} + \underline{2 \times b} = \underline{2 \times (a+b)}$$

c'est un nombre pair

Activité 3

Charlotte adore la lecture et possède entre 400 et 450 romans. Elle décide de revendre ses livres sur internet pour en acheter d'autres. Lorsqu'elle regroupe ses livres par 3, 4 ou par 5, il en reste toujours 1.

Combien de romans Charlotte possède-t-elle exactement ?

FAITE

24 1. Effectuer la division euclidienne de 390 par 26.

2. Recopier et compléter chaque phrase avec « diviseur » ou « multiple ».

a. 390 est un M de 26.

b. 26 a pour M 390.

c. 15 est un D de 390.

d. 390 a pour D 26.

$$390 \overline{) 26}$$

$$\begin{array}{r} 26 \overline{) 390} \\ \underline{0} \\ 0 \end{array}$$

25 Réécrire chaque phrase en utilisant le mot « multiple ».

a. 68 est divisible par 2.

b. 9 est un diviseur de 234.

c. 5 divise 1 470.

d. 119 n'est pas divisible par 9.

$9 \nmid 119 \times \dots$

a. 68 est un multiple de 2.

b. 234 est un multiple de 9

c. 1470 est un multiple de 5

d. 119 n'est pas un multiple de 9

Astuce → le multiple c'est le plus grand

1. Critère de divisibilité par 2, 5 et 10

Propriétés :

- Si un nombre entier a pour chiffre des unités 0, 2, 4, 6 ou 8 (pair) alors il est divisible par 2
- Si un nombre entier a pour chiffre des unités 0 ou 5 alors il est divisible par 5
- Si un nombre entier a pour chiffre des unités 0 alors il est divisible par 10

Exemples :

42 est divisible par 2.
2550 est un multiple de 5 et de 10 et de 2.
1000 est divisible par 10

2. Critère de divisibilité par 3 et 9

Propriétés :

- Si la somme des chiffres d'un nombre entier est divisible par 3 alors ce nombre est divisible par 3.
- Si la somme des chiffres d'un nombre entier est divisible par 9 alors ce nombre est divisible par 9.

Exemples :

111 est un multiple de 3 car $1+1+1=3$ qui est divisible par 3.
• 333 est divisible par 3 et 9 car $3+3+3=9=3 \times 3=9 \times 1$

3. Critère de divisibilité par 4

Propriété : Si les deux derniers chiffres d'un nombre entier forment un nombre divisible par 4, alors ce nombre est divisible par 4

Exemple :

3944 est divisible par 4 car 44 l'est.
108 est divisible par 4 car 08 l'est.

4. Nombre premier

Définition: un nombre premier est un nombre qui a exactement deux diviseurs: 1 et lui-même.

Exemple: exercice 33 p 131.

17 Déterminer la liste des diviseurs de 48.

1, 2, 3, 4, 6, 8, ~~10~~ 12, 16, 24, 48

Critères de divisibilité

27 Trouver un nombre entier qui divise à la fois :

a. 432 et 105.

b. 7 314 et 990 136 → 2 car le dernier chiffres des deux nombres est pair

c. 115 et 3 990.

a) 3
 ↗ 5 car d'après le critère de divisibilité par 5 comme 105 fini par 5 et 3990 par 0 ces deux nombres sont divisibles par 5.

432 :

$$4 + 3 + 2 = 9$$

et 9 est divisible par 3 donc d'après le critère de divisibilité par 3, 432 l'est aussi.

105 :

$$1 + 0 + 5 = 6$$

et 6 est divisible par 3, 105 l'est aussi.

| | | | | | | | | | |
|---------------|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

33 p 13

a) 243

$$2 + 4 + 3 = 9$$

243 est divisible par 3

Que dire des nombres entourés ?

Cette méthode est appelée **crible d'Eratosthène**.

2. En poursuivant cet algorithme au-delà de 100, les nombres suivants seraient-ils entourés ?

a. 243

b. 9 775 014

c. 333 672 995 → divisible par 5

16 Quel est le plus grand diviseur impair de 54 ?

↑ 130.

$$\begin{aligned} 54 &= 1 \times 54 \\ &= 3 \times 18 \\ &= 2 \times 27 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l} 54 & 3 \\ 24 & 18 \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 54 & 2 \\ 14 & 27 \\ \hline 0 & \end{array}$$

39 Sachets de dragées

CALCULER avec différentes procédures.

Flavien veut répartir 760 dragées au chocolat et 1 045 dragées aux amandes dans des sachets ayant la même répartition de dragées au chocolat et aux amandes.

► Peut-il faire 76 sachets ? Justifier. Non
D'après Brevet 2013.

Dragées au chocolat:

$$\begin{array}{r|l} 760 & 76 \\ 0 & 10 \end{array} \quad \text{Oui pour le chocolat}$$

Dragées aux amandes: $\begin{array}{r|l} 1045 & 76 \\ 57 & 13 \end{array}$ Donc non.
il lui restera 57 dragées.

46 Découpe de carrés

CALCULER avec différentes procédures.

1. Une ouvrière dispose de plaques de métal de 110 cm de longueur et de 88 cm de largeur. Elle a reçu la consigne suivante : « Découpez dans ces plaques des carrés tous identiques, dont les longueurs des côtés sont un nombre entier de cm, et de façon à ne pas avoir de perte. »

a. Peut-elle choisir de découper des plaques de 10 cm de côté ? Justifier.

b. Peut-elle choisir de découper des plaques de 11 cm de côté ? Justifier.

2. On lui impose désormais de découper des carrés les plus grands possibles.

a. Quelle sera la longueur du côté d'un carré ?

b. Combien y aura-t-il de carrés par plaques ?

D'après Brevet 2012.

↑ 133

Question 1.a) b)

RAISONNER **CALCULER**

Prise d'initiative

49 Choix de dallage

Zoé voudrait, sans faire de découpe, daller son salon qui est une pièce rectangulaire de 5,20 m de longueur sur 4,60 m de largeur. Les différents formats de dalles disponibles et leurs prix sont indiqués ci-contre.

Ils sont tous vendus uniquement par lots de 20 dalles.

► Quelles sont les différentes possibilités et combien chacune coûtera-t-elle ?

| Format des dalles | Prix à l'unité d'une dalle |
|-------------------|----------------------------|
| 17 cm × 20 cm | 0,83 € |
| 15 cm × 20 cm | 0,81 € |
| 19 cm × 19 cm | 0,85 € |
| 19 cm × 20 cm | 0,89 € |
| 20 cm × 20 cm | 0,90 € |
| 25 cm × 20 cm | 1,00 € |