

Partage équitab

Hugo et ses 11 amis ont récupéré 109
pour son anniversaire

Les 12 amis se disputent pour le

Hugo dit alors : "je me sacrifie. partage
les chocolats équitablement. je prends
reste

Que penser de son sac

Exercices : 1 et 2

Mercure

ARITHMÉTIQUE

I. Nombres entiers naturels et division euclidienne

1. Nombres entiers naturels

Définition : Les nombres entiers naturels sont des nombres servant à dénombrer des objets.

Cet ensemble est composé des nombres entiers positifs : 0 ; 1 ; 2 ; ...

2. Division euclidienne

Propriété : Si a et b sont deux nombres entiers naturels avec $b \neq 0$, alors on peut trouver deux nombres

q et r tels que :

$$a = b \times q + r \quad \text{avec } 0 \leq r < b$$

Exemple

- 1** 1. Effectuer la division euclidienne :
- a. de 138 par 5. b. de 192 par 6. c. de 369 par 15.
2. Parmi les divisions ci-dessus, quelle est celle dont le reste est nul ?

3. Diviseurs et multiples

Définition : Lorsque le reste de la division euclidienne d'un entier a par un entier b différent de 0 est nul ($r=0$) on peut écrire $a=b \times q + 0 = b \times q$

On dit alors que a est un multiple de b (ou que b a pour multiple a).

On dit également que b est un diviseur de a (ou que a est divisible par b).

Exemple

Remarque

2 Jules et Jim ont effectué la division euclidienne de 126 par 15 :

Jules

$$126 = 7 \times 15 + 21$$

Jim

$$126 = 15 \times 8 + 6$$

- Vérifier que les deux égalités sont vraies.
- Peut-on conclure que Jules et Jim ont tous les deux raison ?

$$\begin{array}{r} 126 \\ - 7 \times 15 \\ \hline 056 \\ - 56 \\ \hline 0 \end{array}$$

Jules a faux

$$\begin{array}{r} 126 \\ - 120 \\ \hline 006 \\ - 000 \\ \hline 0 \end{array}$$

Jim a raison.

11 Le diviseur d'une division euclidienne est 12 et le dividende 77.

► Quel est le quotient ? Le reste ?

$$\begin{array}{r}
 77 \overline{) 12} \\
 - 72 \\
 \hline
 05
 \end{array}$$

reste $\nearrow$ quotient $\nwarrow$

12 6 amis se partagent équitablement un paquet de 245 bonbons.

► Combien chacun reçoit-il de bonbons ?

Combien en reste-t-il ?

$$\begin{array}{r}
 245 \overline{) 6} \\
 - 24 \\
 \hline
 05
 \end{array}$$

Chacun a 40 bonbons et il
~~est~~ reste 5.
 en

26 1. Un fleuriste souhaite répartir 81 roses en bouquets de trois roses.

a. Combien fera-t-il de bouquets ?

b. Restera-t-il des roses ?

2. Répondre aux mêmes questions si le fleuriste a 82 roses à répartir.



$$\begin{array}{r} 81 \overline{) 3} \\ -6 \\ \hline 21 \\ -21 \\ \hline 00 \end{array}$$

Yl pourra faire 27 bouquets
Non Yl ne restera pas de rose
Yl restera 1 rose

29 p 13

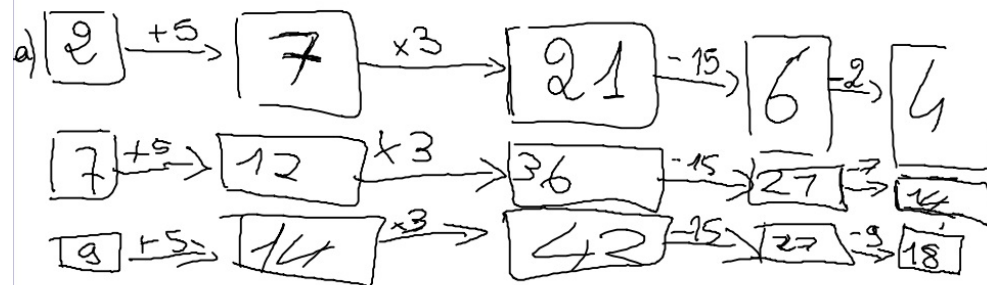
- Choisir un nombre.
- Ajouter 5 à ce nombre.
- Multiplier le résultat par 3.
- Retrancher 15 au résultat. *oter / soustraire*
- Retrancher à ce résultat le nombre choisi au départ.

1. a. Appliquer ce programme de calcul à 2, à 7, puis à 9.

b. Que peut-on conjecturer ?

2. Jérôme a trouvé 16.

Quel nombre a-t-il choisi au départ ?



b) Le nombre d'arrivée semble être le double du nombre de départ (hypothèse)

2. Jérôme a du choisir 8 car $8 \times 2 = 16$

$$8 \xrightarrow{+5} 13 \xrightarrow{\times 3} 39 \xrightarrow{-15} 24 \xrightarrow{-8} 16. \text{ C'est vérifié}$$

$$\begin{array}{r} 39 \\ \times 3 \\ \hline 117 \end{array}$$

37 Hidden digits

CALCULER avec différentes procédures.

Here is an Euclidean division:

$$\begin{array}{r} 256 \\ 4 \overline{) 14} \end{array}$$

► Find the three hidden digits in the dividend.

Cover:

$$a = b \times q + r$$

$$\begin{array}{r} a \\ r \overline{) b} \end{array}$$

$$18 \times 14 + 4 = 256$$

13 Émilie partage un jeu de 52 cartes en 4 piles identiques.

► Combien chaque pile contiendra-t-elle de cartes ?

$$\begin{array}{r} 52 \\ 4 \overline{) 13} \end{array}$$

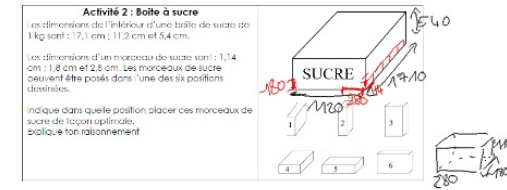
Il y a 13 cartes dans chaque pile.

14 Combien vaut le reste de la division euclidienne de 51 par 4 ?

$$(51 \text{ par } 4 = 03)$$

le reste vaut 3

$$\begin{array}{r} 51 \overline{) 4} \\ \underline{-4} \\ 11 \\ \underline{-8} \\ 03 \end{array}$$



Combien de fois "rentre" 280 dans 1710 ?

$$\begin{array}{r} 1710 \overline{) 280} \\ \underline{-1680} \\ 30 \end{array}$$

On "rentre" 6 sucres
il reste un vide de 30

Combien de fois "rentre" 180 dans 1710 ?

$$\begin{array}{r} 1710 \overline{) 180} \\ \underline{-1620} \\ 90 \end{array}$$

Combien de fois "rentre" 114 dans 1710 ?

$$\begin{array}{r} 1710 \overline{) 114} \\ \underline{0} \\ 15 \end{array}$$

On s'intéresse au côté de la boîte qui mesure 1120.

$$\begin{array}{r} 1120 \overline{) 280} \\ \underline{-1120} \\ 04 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1120 \overline{) 180} \\ \underline{-1080} \\ 40 \end{array}$$

On vérifie que lorsqu'on divise 540 par 180 le reste est nul:

$$\begin{array}{r} 540 \overline{) 180} \\ \underline{-540} \\ 0 \end{array}$$

3 a. 369 est-il un multiple de 15 ?

c. Donner la liste des diviseurs de 24.

b. 6 est-il un diviseur de 192 ?

d. Donner la liste des diviseurs de 72.

$$\begin{array}{r|l} 369 & 15 \\ -30 & 24 \\ \hline 69 & \\ -60 & \\ \hline 9 & \end{array}$$

Ici le reste n'est pas nul donc
369 n'est pas un multiple de 15.

$$\begin{array}{r|l} 192 & 6 \\ -18 & 32 \\ \hline 12 & \\ -12 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Le reste est nul donc 6 divise
192.

4 Un musée organise des visites guidées pour une école. Les élèves sont répartis en groupes, éventuellement inégaux. Tous les groupes comptent entre 20 et 24 enfants.

► Donner trois répartitions possibles pour les 158 élèves de l'école.

$$24 \times 3 + 22 \times 2 + 21 \times 2 = 158$$

$$4 \times 23 + 3 \times 22$$

$$24 \times 1 + 2 \times 23 + 4 \times 22$$

$$54 = 2 \times 27$$

- 15** a. Le périmètre d'un carré de côté 6 est-il un multiple de 18 ?
b. Le périmètre d'un rectangle de longueur 4 et de largeur 3,5 est-il divisible par 5 ?

p 130.

a - ^{périmètre} $P = 4 \times 6 = 24$

et 24 n'est pas un multiple de 18.

Non

b. $P = 2 \times 4 + 2 \times 3,5 = 8 + 7 = 15$

et $15 = 3 \times 5$

15 est divisible par 5

Donc oui.

17 Déterminer la liste des diviseurs de 48.

$$\begin{aligned}1 \times 48 &= 48 \\2 \times 24 &= 48 \\3 \times 16 &= 48 \\4 \times 12 &= 48 \\6 \times 8 &= 48\end{aligned}$$

Activité 3

Charlotte adore la lecture et possède entre 400 et 450 romans. Elle décide de revendre ses livres sur internet pour en acheter d'autres. Lorsqu'elle regroupe ses livres par 3, 4 ou par 5, il en reste toujours 1.

Combien de romans Charlotte possède-t-elle exactement ?

24 et 25 nBo

24 1. Effectuer la division euclidienne de 390 par 26.

2. Recopier et compléter chaque phrase avec « diviseur » ou « multiple ».

a. 390 est un M de 26.

b. 26 a pour M 390.

c. 15 est un D de 390.

d. 390 a pour D 26.

$$390 = 26 \times 15$$

$$\begin{array}{r} 390 \overline{) 26} \\ \underline{26} \\ 130 \\ \underline{130} \\ 000 \end{array}$$

25 Réécrire chaque phrase en utilisant le mot « multiple ».

a. 68 est divisible par 2.

b. 9 est un diviseur de 234.

c. 5 divise 1 470.

d. 119 n'est pas divisible par 9.

Activité 3

Charlotte adore la lecture et possède entre 400 et 450 romans. Elle décide de revendre ses livres sur internet pour en acheter d'autres. Lorsqu'elle regroupe ses livres par 3, 4 ou par 5, il en reste toujours 1.

Combien de romans Charlotte possède-t-elle exactement ?

L : le nombre de livres.

$(L - 1) \rightarrow$ divisible par 3, 4, 5.

① critère de divisibilité par 5: le nombre se termine par 0 ou 5

• ~~400~~ • ~~410~~ • 420 ✓ • ~~430~~ • ~~440~~ ($4+4=8$)
• 405 ✓ ($4+5=9$) • ~~415~~ • ~~425~~ • 435 ($4+3+5=12$) • ~~445~~ ($4+4+5=13$)

② Critère de divisibilité par 3: la somme des chiffres qui composent le nombre est divisible par 3

17 Déterminer la liste des diviseurs de 48.

$$\begin{aligned} 48 &= 1 \times 48 \\ &= 2 \times 24 \\ &= 3 \times 16 \\ &= 4 \times 12 \\ &= 6 \times 8 \end{aligned}$$

1. Critère de divisibilité par 2, 5 et 10

Propriétés :

- Si un nombre entier a pour chiffre des unités 0, 2, 4, 6 ou 8 alors il est divisible par 2
- Si un nombre entier a pour chiffre des unités 0 ou 5 alors il est divisible par 5
- Si un nombre entier a pour chiffre des unités 0 alors il est divisible par 10

Exemples :

222 est divisible par 2. On dit qu'il est pair

2. Critère de divisibilité par 3 et 9

Propriétés :

- Si la somme des chiffres d'un nombre entier est divisible par 3 alors ce nombre est divisible par 3
- Si la somme des chiffres d'un nombre entier est divisible par 9 alors ce nombre est divisible par 9

Exemples :

- 54 est divisible par 3 car $5+4=9=3 \times 3$.
- 54 est aussi $\frac{54}{9} = 6 = 9 \times 1$.
- 5211 est divisible par 9 car $5+2+1+1=9=9 \times 1$.

3. Critère de divisibilité par 4

Propriété : Si les deux derniers chiffres d'un nombre entier forment un nombre divisible par 4, alors ce nombre est divisible par 4

Exemple :

524
7560

23 916

4. Nombre premier

Définition : un nombre premier est un nombre qui admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Exemples : 3 ; 2 ; 5

27 Trouver un nombre entier qui divise à la fois :

- a. 432 et 105. $\Rightarrow 3$.
 b. 7 314 et 990 136. $\Rightarrow 2$. (critère de div.) ($\rightarrow 130$)
 c. 115 et 3 990. $\Rightarrow$ les deux nombres se terminent par 5 ou 0
 ils sont donc divisibles par 5.

a) 432 :

- divisible par 2 (critère de divisibilité par 2)
- $4+3+2=9=3 \times 3$ donc d'après le critère de divisibilité par 3 ; 432 est divisible par 3

105 :

- 105 n'est pas divisible par 2
- $1+0+5=6=2 \times 3$ donc 105 est aussi divisible par 3.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- b. Entourer 2 puis rayer tous les multiples de 2.
 Entourer 3 puis rayer tous les multiples de 3.
 Recommencer ainsi avec le premier nombre non rayé suivant, jusqu'à ce que tous les nombres soient rayés ou entourés.

Que dire des nombres entourés ?

Cette méthode est appelée **crible d'Eratosthène**.

2. En poursuivant cet algorithme au-delà de 100, les nombres suivants seraient-ils entourés ?

- a. 243 b. 9 775 014 c. 333 672 995

33 p 13

- a) divisible par 3
 car $2+4+3=9=3 \times 3$

- b) se termine par 4
 donc il est divisible par 2

- c) est divisible par 5

14 Combien vaut le reste de la division euclidienne de 51 par 4 ?

$$\begin{array}{r} 12 \overline{) 51} \\ \underline{48} \\ 3 \end{array}$$

le reste de la division euclidienne est 3.

39 Sachets de dragées

CALCULER avec différentes procédures.

Flavien veut répartir 760 dragées au chocolat et 1 045 dragées aux amandes dans des sachets ayant la même répartition de dragées au chocolat et aux amandes.

► Peut-il faire 76 sachets ? Justifier.

$$\begin{array}{r} 760 \overline{) 760} \\ \underline{76} \\ 000 \end{array}$$

D'après Brevet 2013.

On obtient 10 dragées dans chaque sachet

$$\begin{array}{r}
 1045 \overline{) 7613} \\
 \underline{761} \\
 285 \\
 \underline{228} \\
 053 \\
 \underline{57} \\
 0
 \end{array}$$

13 carrés 13 chagres
 dans les sachets
 et il en reste ~~63~~
 57

46 Découpe de carrés

CALCULER avec différentes procédures.

1. Une ouvrière dispose de plaques de métal de 110 cm de longueur et de 88 cm de largeur. Elle a reçu la consigne suivante : « Découpez dans ces plaques des carrés tous identiques, dont les longueurs des côtés sont un nombre entier de cm, et de façon à ne pas avoir de perte. »

a. Peut-elle choisir de découper des plaques de 10 cm de côté ? Justifier.

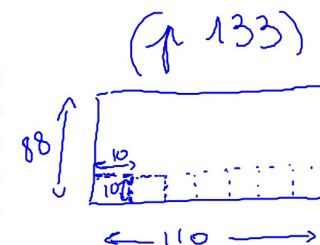
b. Peut-elle choisir de découper des plaques de 11 cm de côté ? Justifier.

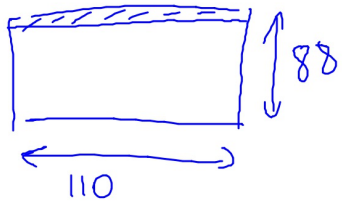
~~x~~ On lui impose désormais de découper des carrés les plus grands possibles.

~~x~~ Quelle sera la longueur du côté d'un carré ?

~~x~~ Combien y aura-t-il de carrés par plaques ?

D'après Brevet 2012.





a) Carrés de côté 10?

$$\begin{array}{r} 110 \overline{) 10} \\ 0 \end{array}$$

En longueur on pourrait mettre 11 carrés.

$$\begin{array}{r} 88 \overline{) 10} \\ 8 \end{array}$$

En largeur on pourrait en mettre 8 mais il restera une bande de 8 cm.

Donc non, on ne peut pas découper des carrés de côtés 10 cm.

b) Carrés de côté 11 cm?

$$\begin{array}{r} 88 \overline{) 11} \\ 0 \end{array}$$

On aura 8 carrés en largeur

$$\begin{array}{r} 110 \overline{) 11} \\ 0 \end{array}$$

On aura 10 carrés en longueur

Donc oui c'est possible.

Il y aura $8 \times 10 = 80$ carrés de découpés.

49 Choix de dallage

Zoé voudrait, sans faire de découpe, daller son salon qui est une pièce rectangulaire de 5,20 m de longueur sur 4,60 m de largeur. Les différents formats de dalles disponibles et leurs prix sont indiqués ci-contre.

Ils sont tous vendus uniquement par lots de 20 dalles.

► Quelles sont les différentes possibilités et combien chacune coûtera-t-elle ?

Format des dalles	Prix à l'unité d'une dalle
17 cm × 20 cm	0,83 €
15 cm × 20 cm	0,81 €
19 cm × 19 cm	0,85 €
19 cm × 20 cm	0,89 €
20 cm × 20 cm	0,90 €
25 cm × 20 cm	1,00 €

