RAPPEL : RESOUDRE UNE EQUATION

Rappel : Résoudre une équation

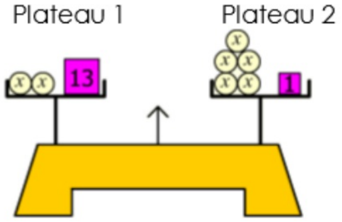
Une **équation** est une **égalité** dans laquelle figure des nombres et une ou plusieurs lettres désignant des **nombres inconnus**.

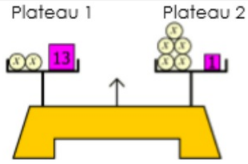
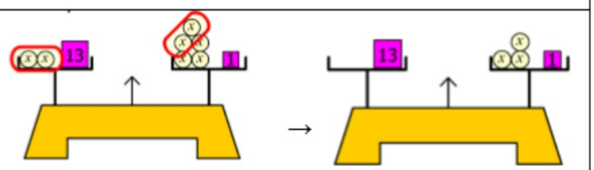
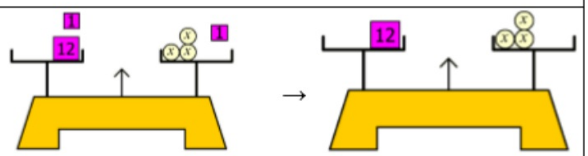
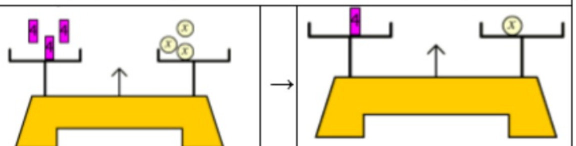
Résoudre une équation, c'est **trouver les solutions** de l'équation, c'est-à-dire, **toutes les valeurs possibles de ces inconnues qui rendent l'égalité vraie**.

<u>Exemple :</u> $2x + 13 = 5x + 1$ **(l'inconnue est x)**

Résoudre l'équation revient alors à trouver toutes les valeurs de x rendant l'égalité vraie.

On peut schématiser cette résolution par l'équilibre d'une **balance de Roberval** :

<table>
<tr><td>Membre 1 Membre 2
$\boxed{2x+13} = \boxed{5x+1}$</td><td>Plateau 1 Plateau 2
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Membre 1 Membre 2
$\boxed{2x+13} = \boxed{5x+1}$</td><td>Plateau 1 Plateau 2
</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Etape 1 :</u> On simplifie le problème en enlevant les inconnues dans un des membres : par exemple on enlève $2x$ dans le premier membre. Mais pour conserver l'égalité (l'équilibre de la balance) il faut également enlever $2x$ dans le second membre</td></tr>
<tr><td>$\boxed{2x+13-\mathbf{2x}} = \boxed{5x+1-\mathbf{2x}}$
$\boxed{\cancel{2x}+13-\cancel{\mathbf{2x}}} = \boxed{5x+1-\mathbf{2x}}$
Donc :
$\boxed{13} = \boxed{3x+1}$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Etape 2 : On isole l'inconnue restante dans le second membre : On enlève 1 dans le second membre. Mais pour conserver l'égalité (l'équilibre de la balance) il faut également enlever 1 dans le premier membre</td></tr>
<tr><td>$\boxed{13-1} = \boxed{3x+1-1}$
Donc :
$\boxed{12} = \boxed{3x}$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Etape 3 :</u> Comme on cherche l'inconnue x (et pas $3 \times x$), on divise chacun des membres par 3</td></tr>
<tr><td>$\boxed{\frac{12}{3}} = \boxed{\frac{3x}{3}}$
Donc :
$\boxed{4} = \boxed{x}$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">On a trouvé l'unique solution à l'équation : $x = 4$</td></tr>
</table>

Applications :

Exercice d'application :

Résoudre les équations suivantes :

a)	$12 + x = 5 - 13\,x$	b)	$7x - 8 = 3x + 2$
c)	$5 - 12\,x + 13,5 = -x + 12 + 3x - 7,5$	d)	$\frac{x}{5} + 11 = -9$
e)	$5 - \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$	f)	$\frac{11}{5}x + 2 = 0$
g)	$11 = 5 + \frac{3}{2}x$	h)	$3x + 7(8 - x) + 4 = 60 + x$

a) $12 + x = 5 - 13x$

$+13x \quad 12 + 14x = 5 \quad +13x$

$-12 \quad 14x = -7 \quad -12$

$:14 \quad x = -0,5 \quad :14$

Problème n°1 :

Un commerçant veut écouler 100 chemises démodées. Il réussit à en vendre 43 au prix initial.

Il consent alors un rabais de 1 € par chemise et en vend ainsi 17. Il liquide le reste à 1,5 € l'unité.

Calculer le prix initial d'une chemise, sachant qu'il a encaissé en tout 1 243 € ?

étape 1.

On appelle x le prix initial d'une chemise.

étape 2

Méthode de résolution : exemple problème 1

1ère étape : Choix de l'inconnue :

On appellera x ……………………………………

2ème étape : Mise en équation du problème :

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

3ème étape : Résolution de l'équation :

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

4ème étape : Vérification :

On remplace x par la valeur trouvée :

$60 \times 20 + 43 = 1243$ ✓

5ème étape : conclusion :

Le prix initial d'une chemise est de 20 €

$43 \times x + 17 \times (x - 1) + (100 - 43 - 17) \times 1,5 = 1243$

$43x + 17x - 17 + 40 \times 1,5 = 1243$

étape 3 :

$-43 \quad 60x + 43 = 1243 \quad -43$

$60x = 1200$

$x = 1200 : 60 = 20$

EQUATIONS – INEQUATIONS

I. Equations du premier degré à une inconnue (rappel)

1. Définitions

Définition 1 : Une **équation** est une **égalité** dans laquelle intervient un nombre de valeur **inconnue**. Ce nombre est souvent désigné par une **lettre**.

Exemple et vocabulaire : On considère l'équation : $\boxed{7+x} = \boxed{5x-5}$

x est l'inconnue — membre de gauche — membre de droite

Définition 2 : **Résoudre** une équation, c'est trouver **toutes les valeurs possibles du nombre inconnu** telles que l'égalité soit vraie. Chacune de ces valeurs est appelée solution de l'équation

2. Tester une égalité

Lorsqu'on demande de vérifier si une égalité est vraie pour une valeur donnée de l'inconnue, il suffit de remplacer l'inconnue par la valeur donnée dans chaque membre de l'égalité et de comparer les résultats : s'ils sont égaux alors l'égalité est vérifiée, sinon elle ne l'est pas.

Exemple : Soit l'égalité $7+x=5x-5$	
• Vérifier si l'égalité est vraie pour $x=2$: On remplace x par 2 dans chacun des membres : Membre de gauche : $7+2=9$ Membre de droite : $5\times2-5=5$ Conclusion : L'égalité n'est pas vraie	• Vérifier si l'égalité est vraie pour $x=3$: On remplace x par 3 dans chacun des membres : Membre de gauche : $7+3=10$ Membre de droite : $5\times3-5=10$ Conclusion : L'égalité est vraie

3. Résoudre une équation

Propriétés :
■ **L'égalité est conservée** lorsqu'on **ajoute** (ou **soustrait**) un **même nombre** à **chaque membre** de l'équation.
■ **L'égalité est conservée** lorsqu'on **multiplie** (ou **divise**) par un **même nombre** non nul **chaque membre** d'une équation.

Méthode de résolution détaillée : voir fiche « rappel : résoudre une équation »

4. Mise en équation d'un problème et résolution

Pour résoudre un problème on suit toujours les 5 étapes suivantes :
① Choisir **l'inconnue** que l'on désigne par une lettre (souvent la quantité cherchée dans la **question**)
② Mise en **équation** du problème : on traduit l'énoncé par une équation mathématique
③ **Résolution** de l'équation
④ **Vérification** de la (ou des) solution(s) trouvée(s)
⑤ Conclusion : **interprétation** des solutions mathématiques et **phrase de conclusion**

Méthode de mise en équation et résolution détaillée : voir fiche « rappel : résoudre une équation »

INEQUATIONS

Découvrir les inéquations

Une **A**ssociation pour le **M**aintien de l'**A**griculture **P**aysanne vend des produits de la ferme aux consommateurs. L'AMAP « *Pomme Verte* » propose à ses adhérents des paniers hebdomadaires au coût unitaire de 9,50 € pour un engagement au mois.

↳ par semaine → 4 semaines par mois

a. Compléter le tableau ci-dessous.

4 × 9,50

Nombre de mois d'engagement	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	***x***
Coût total mensuel (en €)	38	76	114	152	190	228	266	$38x$

b. Les adhérents peuvent aussi s'engager sur un an, pour un coût total de 350 €.

À partir de combien de mois devient-il intéressant pour le consommateur de souscrire à l'engagement annuel ?

Traduire cette question à l'aide d'une inéquation.

$38x > 350$

BILAN :

Une **inéquation** est une inégalité où figure une inconnue (x)

Résoudre une inéquation, c'est trouver les valeurs de l'inconnue qui vérifient l'inégalité.

Résoudre des inéquations : les règles de calculs

1. Compléter les pointillés du tableau suivant.

1	***a***	3	6	–2	–5	
2	***b***	5	–1	9	–8	
3	**Comparaison de *a* et *b***	3 < 5	6 > –1	–2 < 9	–5 > –8	
4	**Comparaison de *a* + 5 et *b* + 5**	8 < 10	11 ... 4	3 ... 14	0 ... –3	
5	**Comparaison de *a* – 7 et *b* – 7**	–4 < –2	–1 ... –8	–9 ... 2	–12 ... –15	
6	**Comparaison de 3*a* et 3*b***	9 < 15	18 ... –3	–6 ... 27	–15 ... –24	
7	**Comparaison de –3*a* et –3*b***	–9 > –15	–18 ... 3	6 ... –27	15 ... 24	
8	**Comparaison de** $\frac{a}{2}$ **et** $\frac{b}{2}$	$\frac{3}{2} < \frac{5}{2}$	3 ... $-\frac{1}{2}$	-1 ... $\frac{9}{2}$	$-\frac{5}{2}$ ... -4	

2. a. Observer les lignes 3 et 4 : que remarque-t-on ? le sens de l'inégalité ne change pas.

b. Observer les lignes 3 et 5 : que remarque-t-on ? –

c. Observer les lignes 3, 6 et 8 : que remarque-t-on ? ……

d. Observer les lignes 3 et 7 : que remarque-t-on ? si on × ou ÷ par un nombre négatif le sens change

3. Choisir 2 nombres *a* et *b* : les observations faites précédemment sont-elles toujours valables ? ……

BILAN :

On ne change pas le sens d'une inégalité lorsqu'on additionne / soustrait ou lorsqu'on multiplie / divise par un nombre positif

On inverse le sens d'une inégalité lorsqu'on multiplie ou divise par un nombre négatif

45 p 162

45 x vérifie l'inégalité $x > 7$.

Écrire l'inégalité vérifiée par :

p 162

a. $x + 3$ b. $x - 3$ c. $2x$

d. $-2x$ e. $-x$ f. $2x + 3$

a) $x > 7$; $+3$; $x + 3 > 10$

$x > 7$; -3 ; $x - 3 > 4$

$x > 7$; $\times 2$; $2x > 14$

$x > 7$; $\times(-2)$; $-2x < -14$

$x > 7$; $\times(-1)$; $-x < -7$

$x > 7$; $\times 2$; $2x > 14$; $+3$; $2x + 3 > 17$

II. Inéquations du premier degré à une inconnue

1. Définition

Définition : Une **inéquation** du premier degré à une inconnue est une **inégalité** (> ou ≥ ou < ou ≤) dans laquelle intervient un nombre de valeur **inconnue**. Ce nombre est souvent désigné par une **lettre**.

Vocabulaire :

≥ signifie « supérieur ou égal à » :

On a $3 \geq 3$ qui est vraie mais $3 > 3$ qui est fausse ! De même $4 \geq 3$ est vraie et $3 \geq 4$ est fausse !

≤ signifie « inférieur ou égal à » :

On a $3 \leq 3$ qui est vraie mais $3 < 3$ qui est fausse ! De même $3 \leq 4$ est vraie et $4 \leq 3$ est fausse !

2. Tester une inégalité

On procède de la **même manière** que pour tester une égalité sauf que l'on va comparer les deux membres de l'inégalité

Exemple : $4x - 5 > 4 + 7x$ est une inéquation d'inconnue x	
• Vérifier si l'inégalité est vraie pour $x = 2$: On remplace x par 2 dans chacun des membres : Membre de gauche : $4 \times 2 - 5 = 3$ Membre de droite : $4 + 7 \times 2 = 16$ Conclusion : Or $3 < 16$ donc l'inégalité est fausse.	• Vérifier si l'inégalité est vraie pour $x = -4$: On remplace x par -4 dans chacun des membres : Membre de gauche : $4 \times (-4) - 5 = -21$ Membre de droite : $4 + 7 \times (-4) = -24$ Conclusion : Or $-21 > -24$ donc l'inégalité est vraie.

3. Résoudre une inéquation

Propriétés :
■ **Lorsqu'on ajoute** (ou **soustrait**) un **même nombre** à **chaque membre** de l'inégalité, on ne change pas le sens de l'inégalité.
■ **Lorsqu'on multiplie** (ou **divise**) par un **même nombre POSITIF chaque membre** d'une inégalité, on **CONSERVE le sens de l'inégalité**.
■ **Lorsqu'on multiplie** (ou **divise**) par un **même nombre NEGATIF chaque membre** d'une inégalité, on **INVERSE le sens de l'inégalité**.

4. Représentation des solutions :

On trace une droite graduée, on repère le nombre « limite » de solution, on hachure l'ensemble des solutions et on place un crochet tourné suivant si l'on prend ou non le nombre « limite ».

Exemples :

$x+3 \geq 10$ -3 -3 $x \geq 7$ x 7	$3x \leq 4$ On divise par 3 qui est positif $x \leq \frac{4}{3}$ x $\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{5}x < 2$ On divise par $-\frac{1}{5} < 0$ $x > \frac{2}{-\frac{1}{5}}$ $x > 2 \times (-5)$ donc $x > -10$ x -10

5. Mise en inéquation d'un problème et résolution

La méthode reste la même que celle présentée pour les équations, à savoir :

Pour résoudre un problème on suit toujours les 5 étapes suivantes :
① Choisir **l'inconnue** que l'on désigne par une lettre (souvent la quantité cherchée dans la **question**)
② Mise en **inéquation** du problème : on traduit l'énoncé par une équation mathématique
③ **Résolution** de l'inéquation
(④ Vérification de la (ou des) solution(s) trouvée(s) sur quelques valeurs numériques)
⑤ Conclusion : **interprétation** des solutions (représentation sur **l'axe**) et phrase de **conclusion**

8 Juan, Selim et Rebecca ont résolu l'inéquation $6 - 2y > 8$.

p 157

▶ Qui a raison ? Justifier.

Juan
$6 - 2y > 8$
$-2y > 8 - 6$
$-2y > 2$ donc $y \cancel{>} -1$
Les nombres plus grands que -1 sont solutions de l'inéquation.

Selim
$6 - 2y > 8$
$6 - 2y - 6 < 8 - 6$
$-2y > 2$ donc $y < -1$
Les solutions sont les nombres plus petits que -1.

Rebecca
$6 - 2y > 8$
$6 - 2y - 6 > 8 - 6$
$-2y > 2$ donc $y < -1$
Les solutions sont les nombres plus petits que -1.

$$6 - 2y > 8$$
-6 -6
$$-2y > 2$$
$:(-2)$ $:(-2)$
$$y < -1$$

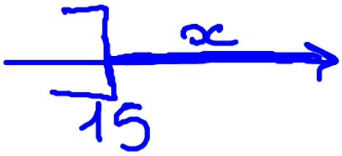
9 Résoudre les inéquations suivantes.

a. $x - 3 > 12$ **b.** $x + 4 \geqslant -7$ **c.** $-2x < 20$ **d.** $2x < -20$ **e.** $4x - 3 \leqslant -1$

p 157

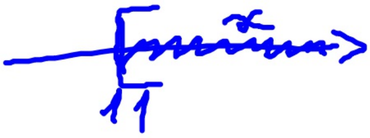
$x - 3 > 12$ $\quad (+3)$

$x > 15$



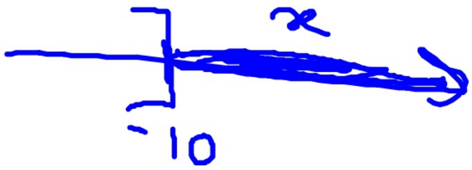
b) $x + 4 \geqslant -7$ $\quad (-4)$

$x \geqslant -11$



$-2x < 20$ $\quad :(-2)$

$x > -10$



$4x - 3 \leqslant -1$ $\quad (+3)$

$4x \leqslant 2$ $\quad :4$

$x \leqslant 0{,}5$

55 Pendant l'été, un marchand de glaces dépense 75 € par semaine pour fabriquer des glaces dont le prix est 2,50 € l'unité. Il voudrait en vendre suffisamment pour obtenir un bénéfice supérieur à 76 € chaque semaine.

p 163

1. Quelle inéquation modélise ce problème ?

a. $x \leqslant 151$ **b.** $x \geqslant 2{,}5 \times (76 + 75)$

c. $2{,}5x \geqslant 76 - 75$ **d.** $2{,}5x \geqslant 151$

2. Résoudre le problème.

x : nombre glaces vendues.

$2{,}50 \times x \geqslant \underline{76} + \underline{75} \Rightarrow$ d

rembourser l'investissement.

$2{,}5x \geqslant 151$ $\quad :2{,}5$

$x \geqslant 60{,}4$.

A partir de 61 glaces

57 Programmes de calcul

p 163

A	B
- Choisir un nombre. : x	- Choisir un nombre. x
- Le multiplier par 3.	- Le multiplier par 5.
- Retrancher 4.	- Ajouter 8.

a. Pour quels nombres choisis au départ le résultat du programme de calcul A est-il strictement inférieur au résultat du programme de calcul B ?

b. Représenter ces nombres sur une droite graduée.

$A = 3x - 4$

$B = 5x + 8$

$A < B$

$3x - 4 < 5x + 8$ (−3x)

$-4 < 2x + 8$ (−8)

$-12 < 2x$ (:2)

$-6 < x$

B<A] A<B

−6 x

67 Abonnement

MODÉLISER une situation par une inéquation.

p 165

L'abonnement d'un an à *AdoMagazine* permet de recevoir 26 numéros et un numéro spécial pour 75 €.

Le tarif normal au numéro est de 3,49 € et le numéro spécial coute 5,27 €.

▶ En achetant le numéro spécial, à partir de combien de numéros normaux achetés dans l'année l'abonnement est-il plus intéressant ? x

⇒ À partir de 20 numéros achetés.

$x \times 3{,}49 + 5{,}27 > 75$ (−5,27)

$3{,}49x > 69{,}73$ (:3,49)

$x > 69{,}73 : 3{,}49$

Equations produit nul

Exercice 1 : *Résoudre les équations en rédigeant de la façon suivante :*

$(2x + 5)(3x - 1) = 0$

signifie que : $2x + 5 = 0$ ou $3x - 1 = 0$

$2x = -5$ ou $3x = 1$

$x = -\frac{5}{2}$ ou $x = \frac{1}{3}$

Les solutions de l'équation sont $-\frac{5}{2}$ *et* $\frac{1}{3}$.

$(x+5)(x-3)=0$ $x+5=0$ ou $x-3=0$ $x=-5$ ou $x=3$	$(4x-1)(6x+5)=0$ $4x-1=0$ ou $6x+5=0$ $4x=1$ ou $6x=-5$ $x=0,25$ ou $x=-1,2$
$(-8x+5)(-2-3x)=0$	~~$(3x+4)(2-5x)=0$~~ $3x(7+8x)=0$

Exercice 2 :

Expression A

a. *Factoriser l'expression :* $A = (x + 3)(x + 2) + (x + 3)(x + 1)$

b. *Résoudre l'équation :* $(x + 3)(2x + 3) = 0$

Expression B

a. *Factoriser l'expression :* $B = (x + 5)(2x + 1) + (x + 5)(x - 7)$

b. *Résoudre l'équation :* $(x + 5)(3x - 6) = 0$