STATISTIQUE ET PROBABILITES

PARTIE 1 : TRAVAIL PERSONNEL :

Conjecture : Selon toi, quelle est la probabilité d'obtenir la face 6 lorsqu'on lance un dé non truqué ? $\frac{1}{6}$ $\approx 0,17$

1. **Expérimentation :**
   - **Etude de l'expérience aléatoire :** Lancer un dé et observer la face obtenue

Lancer 10 fois un dé et noter dans le tableau ci-dessous les résultats obtenus :

Face obtenue	1	2	3	4	5	6	TOTAL
Effectif	9						10
Fréquence	$\frac{2}{10} = 0,2$						1

- Compléter la phrase suivante :

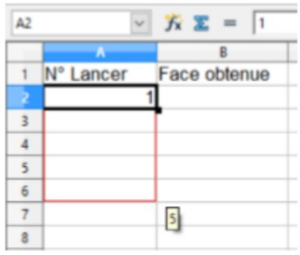
« Lors de mes 10 lancers, j'ai obtenu …… fois la face 1, …… fois la face 2, …… fois la face 3, …… fois la face 4, …… fois la face 5 et …… fois la face 6.

- ***Mettre les réponses en commun via le site du collège (lien vers un sondage)***

PARTIE 2 : SIMULATION DE 200, 500 PUIS 1000 LANCERS

Afin de simuler un grand nombre de fois notre expérience aléatoire « lancer d'un dé » on va utiliser le **tableur** :

1. **200 lancers :Création de la simulation**
   - Ouvrir le tableur Open office Calc
   - Reproduire le tableau ci-contre :
     - Dans la cellule A1 écrire « N° Lancer »,
     - Dans la cellule B1 écrire « face obtenue »,
     - dans la cellule A2 écrire 1.
   - Sélectionne la cellule A2 et étire la vers le bas*, le tableur numérote automatiquement les lancers : aller jusqu'à 200
   - Pour simuler un lancer on utilise la formule $\boxed{= ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)}$: le tableur génère alors un nombre entier de manière aléatoire compris entre 1 et 6 (1 et 6 inclus) :
     - Dans la cellule B2 entrer la formule ci-dessus
     - Sélectionne la cellule B2 et étire la vers le bas* : aller jusqu'à la cellule B 201 pour faire les 200 simulations



* : méthode : il faut sélectionner la cellule, se placer dans l'angle en bas à droite de la cellule et lorsqu'une croix apparaît l'étirer vers le bas.

2. **200 lancers : Exploitation des résultats**

On s'intéresse toujours à **l'évènement « obtenir la face 6 ».**

Il faut maintenant compter le nombre de fois où on a obtenu 6 avec la simulation puis sa fréquence d'apparition :

- Dans la cellule C1 recopier la formule $\boxed{= NB.SIBORNES(B2{:}B201;6)/200}$: cette fonctionnalité permet de compter le nombre de fois où le nombre 6 est présent entre les cellules B2 et B201 puis divise ce nombre par 200 (le nombre de lancers effectués)
- Noter la fréquence obtenue dans le tableau final

TABLEAU FINAL :

Nombre de lancers simulés	200	500	1 000
Fréquence observée			

$p = \frac{1}{6} \simeq 0{,}17$

- Noter la fréquence obtenue dans le tableau final

3. **500 lancers :** modifier la feuille de calcul afin de réaliser 500 lancers puis noter la fréquence obtenue dans le tableau final
4. **1000 lancers :** modifier la feuille de calcul afin de réaliser 1000 lancers puis noter la fréquence obtenue dans le tableau final

TABLEAU FINAL :

Nombre de lancers simulés	200	500	1 000
Fréquence observée			

Observation : ***Compare les fréquences obtenues par rapport à la conjecture faite au début de l'activité.***

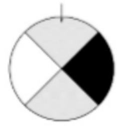
PROBABILITES

I) Expérience aléatoire, issues et évènements

1. Expérience aléatoire et issues

Définition : Une ***expérience*** est dite ***aléatoire*** lorsqu'elle a plusieurs résultats ou ***issues*** possibles et que l'on ne peut pas prévoir avec certitude quelle issue se produira.

On considère les 3 expériences aléatoires suivantes :

Exemple 1 :	Exemple 2 :	Exemple 3 :
On lance une pièce de monnaie équilibrée et on regarde sa valeur supérieure. 	On lance un dé équilibré à 6 faces et on regarde le nombre de points inscrits sur sa face supérieure. 	On fait tourner une roue de loterie équilibrée, on attend qu'elle se stabilise et on regarde la couleur désignée par la flèche. 
Issues possibles : pile ; face	Issues possibles : 1;2;3;4;5;6	Issues possibles : noir ; blanc ; gris x2

2. Evénements

Définition : Un ***évènement*** est une condition qui peut être ou ne pas être réalisée lors de l'expérience.
Un évènement peut être réalisé par **aucune, une ou plusieurs issues** de l'expérience aléatoire.
Un évènement réalisé par une seule issue est appelé **événement élémentaire**.

Dans l'exemple 1, l'évènement « obtenir pile » est un évènement élémentaire	Dans l'exemple 2, l'évènement « obtenir un nombre pair » est réalisé pour les issues 2 ; 4 ; 6. L'évènement « obtenir 4 » est un évènement élémentaire	Dans l'exemple 3, l'évènement « obtenir gris » est réalisé avec 2 secteurs de la roue.

II) Probabilité d'un évènement

1. Définition

La probabilité d'un évènement peut s'interpréter comme la « proportion de chance » que cet évènement se réalise.

Définition : Lorsqu'on effectue ***un très grand nombre de fois*** une expérience aléatoire de façon ***indépendante*** et dans les ***mêmes conditions***, la ***fréquence*** de réalisation d'un événement E se rapproche d'une valeur appelée ***probabilité*** de l'événement.
Elle se note $p(E)$.

Dans l'exemple 1, La probabilité de l'évènement P : « obtenir pile » est $\frac{1}{2}$	Dans l'exemple 2, la probabilité de l'évènement A : « obtenir 6 » est $\frac{1}{6}$	Dans l'exemple 3, la probabilité de l'évènement G : « obtenir gris » est $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

2. Propriétés

Propriétés :
- La **probabilité d'une issue** est un **nombre compris entre 0 et 1**
- La **somme des probabilités** de toutes les issues d'une expérience aléatoire est **égale à 1**.

Remarque : une probabilité peut s'exprimer sous forme d'écriture décimale, fractionnaire, de pourcentage

3. Situation d'équiprobabilité

Définition : Lorsque **chaque issue** d'une expérience aléatoire **a la même probabilité** de se réaliser on dit que la situation est **équiprobable** ou qu'il y a **équiprobabilité**.

Propriété : Dans une expérience aléatoire où il y a équiprobabilité, la probabilité d'un événement est égale au quotient : $\dfrac{\textit{Nombre d'issues réalisant l'événement}}{\textit{Nombre total issues de l'expérience}}$

Dans les exemples 1 et 2, on est dans des situations d'équiprobabilité.
Il faut modifier les issues choisies pour l'expérience 3 afin d'être en situation d'équiprobabilité :

Exemple 1 :	Exemple 2 :	Exemple 3 : En différenciant les secteurs de la roue on peut se ramener à une situation d'équiprobabilité. Les issues possibles sont alors : Noir, blanc, gris 1 et gris 2.
La probabilité d'obtenir pile est égale à $\frac{1}{2}$ La probabilité d'obtenir face est égale à $\frac{1}{2}$	La probabilité d'obtenir chacune des faces du dé est égale à $\frac{1}{6}$. La probabilité d'obtenir un nombre pair est $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	La probabilité d'obtenir chacun des secteurs est égale à $\frac{1}{4}$ La probabilité d'obtenir gris est égale à $\frac{2}{4}$ $= \frac{1}{2}$

36 Un forain fait tourner une roue de loterie partagée en huit secteurs identiques numérotés de 1 à 8.

p 217

1. Donner toutes les issues possibles qui correspondent aux évènements suivants :
- A : « Obtenir un nombre pair. » → 2, 4, 6, 8
- B : « Obtenir un multiple de 3. » → 3 ; 6
- C : « Obtenir un nombre supérieur à 4 et impair. » → 5 ; 7

2. Dans le cadre de cette expérience aléatoire, décrire :

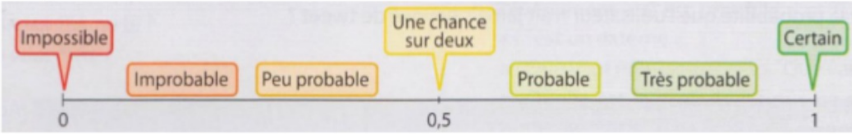
a. un évènement certain ; → obtenir un chiffre

b. un évènement impossible. → obtenir 9.

III) Evènements et probabilités associées

1. Evènement certain, évènement impossible

Plus un évènement a de chance de se réaliser, plus sa probabilité est proche de 1, moins il a de chance de se réaliser, plus sa probabilité est proche de 0.



Propriétés :
- La **probabilité** d'un **événement impossible** est égale à **0**
- La **probabilité** d'un **événement certain** est égale à **1**

Dans l'exemple 2, l'évènement A : « obtenir un nombre compris entre 1 et 6 » est certain
On a $p(A) = \frac{6}{6} = 1$

Dans l'exemple 3, l'évènement R : « obtenir la couleur rouge » est impossible
On a $p(R) = 0$

2. Evènements incompatibles

Définition : On dit que deux évènements sont **incompatibles** s'ils **ne peuvent pas se réaliser en même temps.**

Propriété : Si deux évènements A et B sont **incompatibles** alors $p(A \text{ ou } B) = p(A) + p(B)$

Dans l'exemple 2, les évènements A : « obtenir 2 » et B : « obtenir un nombre impair » sont incompatibles
L'évènement A ou B correspond à « obtenir 2 ou obtenir un nombre impair »
On a $p(A) = \frac{1}{6}$ et $p(B) = \frac{3}{6}$ donc $p(A \text{ ou } B) = p(A) + p(B) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

3. Evénements contraires

Définition : **L'évènement contraire d'un évènement A** est l'évènement qui se réalise lorsque A n'est pas réalisé. On le note $\bar{A}$ (lire « non A » ou « A barre).

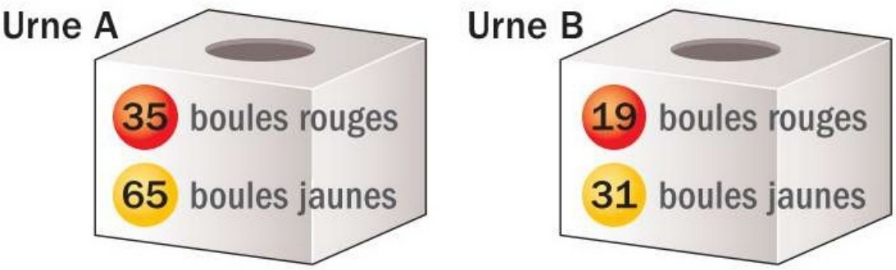
Propriété : La somme des **probabilités** d'un **évènement et son contraire** est égale à **1** : $p(A) + p(\bar{A}) = 1$

Dans l'exemple 1, les évènements "obtenir pile" et "obtenir face" sont contraires.

Dans l'exemple 2, les évènements "obtenir 3" et "ne pas obtenir 3" sont contraires.

18 Deux urnes contiennent des boules indiscernables au toucher. On choisit une des deux urnes et on tire une boule au hasard. On gagne si la boule obtenue est rouge. R

p 212



▶ Est-il vrai qu'on a plus de chances de gagner en choisissant l'urne B ? Justifier.

D'après Brevet 2015.

Urne A. $p(R) = \frac{35}{35+65} = \frac{35}{100} = 35\%$

Urne B. $p(R) = \frac{19}{19+31} = \frac{19}{50} = \frac{38}{100} = 38\% \Longrightarrow$ il y a plus de chance de gagner

Dans un restaurant, au menu, le chef propose aux clients :

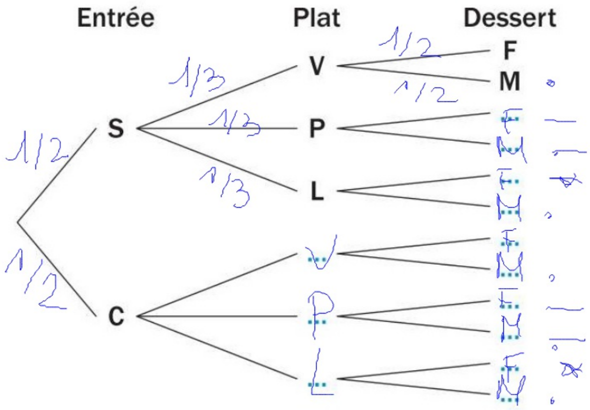
– deux entrées : salade (S) ou charcuterie (C) ;

– trois plats : viande (V) ou poisson (P) ou lasagnes (L) ;

– deux desserts : fruits (F) ou mousse au chocolat (M) ;

20 p 213

1. a. Reproduire l'arbre suivant et le compléter pour obtenir tous les menus possibles.



SVF
SVM

b. Combien de menus différents le chef peut-il servir aux clients ? 12

2. Quelle est la proportion de menus possibles comportant :

2. a) Salade

$\frac{6}{12} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$

b) Mousse

$\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

c) $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

d) lasagnes et fruits

$\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

1 Un jeu de *Scrabble* français comporte 102 jetons dont 45 voyelles et 2 jokers. Les autres jetons sont des consonnes. Un joueur pioche au hasard un jeton.
Voici cinq évènements de cette expérience aléatoire :

- A : « Le jeton est un joker. »
- B : « Le jeton comporte une voyelle. »
- C : « Le jeton comporte une lettre. »
- D : « Le jeton comporte la lettre U. »
- E : « Le jeton comporte la lettre R. »

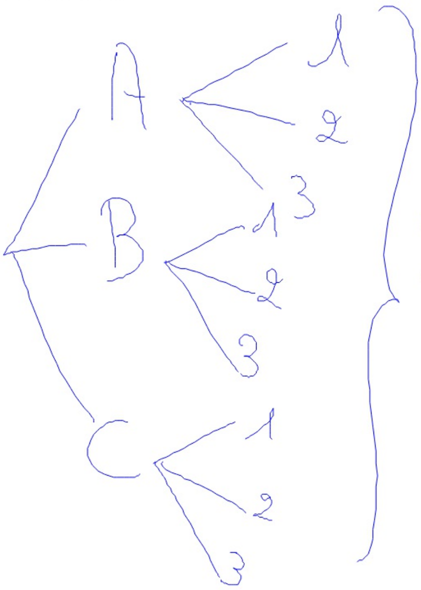
a. Parmi les évènements ci-dessus, lesquels sont incompatibles avec l'évènement A ?
b. Parmi les évènements ci-dessus, lesquels sont incompatibles avec l'évènement B ?
c. Parmi les évènements ci-dessus, quel est l'évènement contraire de l'évènement A ?
d. Définir de deux manières différentes l'évènement contraire de l'évènement B.

p 221

a) B, C, D, E
b) A, E
c) C
d) "Le jeton ne comporte pas de voyelle".
"Le jeton est une consonne ou un joker".

21 Un digicode commande l'ouverture de la porte d'un immeuble. Le code est composé d'une lettre A, B ou C, suivie d'un chiffre 1, 2 ou 3.
Alexia compose au hasard le code A1.
▶ Quelle est la probabilité que ce soit le bon code ?

p 225



9 possibilités

probabilité de $\frac{1}{9}$

IV) Expérience aléatoire à deux épreuves et arbre des probabilités

1. Construire et utiliser un arbre des probabilités

Pour représenter une expérience aléatoire, on peut construire un **arbre des probabilités.**

Un arbre des probabilités est composé de **branches** et de **nœuds**.

A l'issue de chacune des branches de l'arbre on note une des issues possibles : c'est un nœud de l'arbre.
Au-dessus de la branche on note la probabilité associée.

Un **chemin** est une suite de branches.

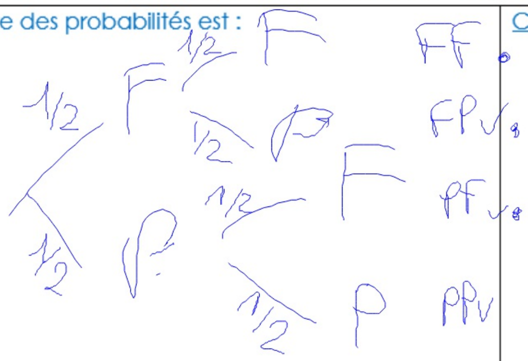
2. Propriétés

Propriétés :

- La **somme des probabilités** portées sur les branches issues d'un **même nœud** est égale à **1**
- La **probabilité d'un chemin** est égale au **produit** des **probabilités rencontrées le long de ce chemin**

Dans l'exemple 1, l'expérience aléatoire à deux épreuves étudiée consiste à tirer deux fois la pièce de monnaie. Soit P l'évènement « obtenir pile » et F l'évènement « obtenir face ».

L'arbre des probabilités est :



Calcul des probabilités :

$$p(P) = \frac{3}{4}$$

$$p(F) = \frac{3}{4}$$

3. Exemple d'expérience aléatoire à deux épreuves : deux tirages dans une urne

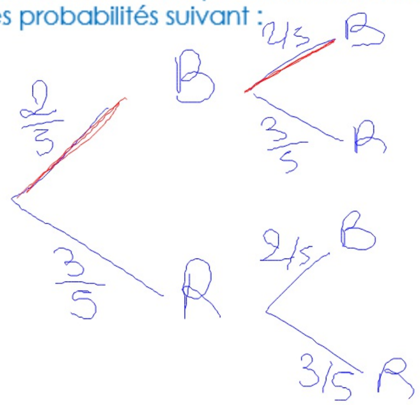
Dans une urne contenant deux boules blanches et trois boules rouges.

On note B l'évènement « on tire une boule blanche » et R l'évènement « on tire une boule rouge »

Expérience aléatoire 1 : on tire une première boule, on note la couleur obtenue puis on remet la boule dans l'urne et on tire une seconde boule.

On dit que les **tirages** sont **successifs avec remise.**

Afin de calculer les probabilités, on construit l'arbre des probabilités suivant :

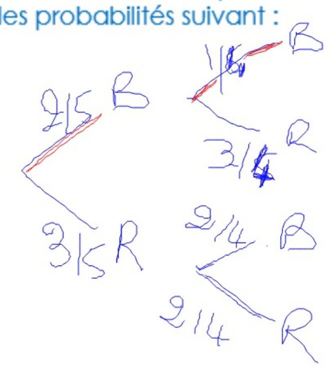


La probabilité d'obtenir deux boules blanches est :

$$p(B) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$$

Expérience aléatoire 2 : On tire une première boule puis une seconde sans remettre la première dans l'urne : les **tirages** peuvent être **simultanés ou successifs sans remise.**

Afin de calculer les probabilités, on construit l'arbre des probabilités suivant :



La probabilité d'obtenir deux boules blanches est :

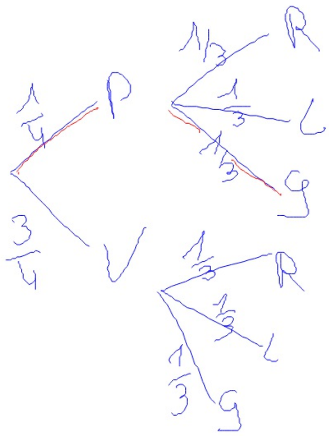
$$p(B) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

17 Pour composer le menu du jour, le cuisinier d'un restaurant choisit au hasard un plat parmi viande (V) ou poisson (P), puis un accompagnement parmi riz (R), légumes (L) ou gratin (G).

Coup de pouce

Sur un arbre de probabilité, la probabilité de l'issue auquel conduit un chemin est le produit des probabilités rencontrées sur ce chemin.

p 225



Sa réserve froide est composée de 25 % de poisson et 75 % de viande et, pour l'accompagnement, du même nombre de portions de riz, légumes et gratin.

a. Construire un arbre pour représenter cette situation. Reporter les probabilités de l'énoncé sur les branches qui conviennent.

b. À l'aide de l'arbre, calculer la probabilité de l'évènement « obtenir un menu du jour composé de poisson et de gratin ». $p = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

c. Calculer la probabilité de l'évènement « obtenir un menu du jour composé de viande et de riz ».

$p = \frac{\cancel{3}}{4} \times \frac{1}{\cancel{3}} = \frac{1}{4}$

17 Pour composer le menu du jour, le cuisinier d'un restaurant choisit au hasard un plat parmi viande (V) ou poisson (P), puis un accompagnement parmi riz (R), légumes (L) ou gratin (G).

Coup de pouce

Sur un arbre de probabilité, la probabilité de l'issue auquel conduit un chemin est le produit des probabilités rencontrées sur ce chemin.

p 225

Sa réserve froide est composée de 25 % de poisson et 75 % de viande et, pour l'accompagnement, du même nombre de portions de riz, légumes et gratin.

a. Construire un arbre pour représenter cette situation. Reporter les probabilités de l'énoncé sur les branches qui conviennent.

b. À l'aide de l'arbre, calculer la probabilité de l'évènement « obtenir un menu du jour composé de poisson et de gratin ».

c. Calculer la probabilité de l'évènement « obtenir un menu du jour composé de viande et de riz ».

17 Pour composer le menu du jour, le cuisinier d'un restaurant choisit au hasard un plat parmi viande (V) ou poisson (P), puis un accompagnement parmi riz (R), légumes (L) ou gratin (G).

Coup de pouce

Sur un arbre de probabilité, la probabilité de l'issue auquel conduit un chemin est le produit des probabilités rencontrées sur ce chemin.

p 225

Sa réserve froide est composée de 25 % de poisson et 75 % de viande et, pour l'accompagnement, du même nombre de portions de riz, légumes et gratin.

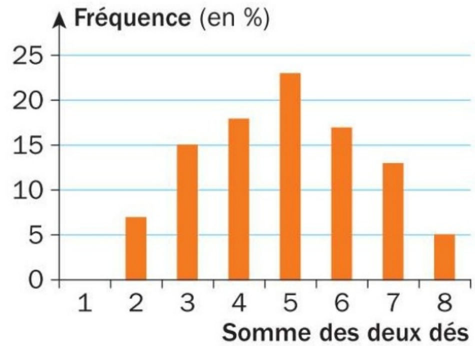
a. Construire un arbre pour représenter cette situation. Reporter les probabilités de l'énoncé sur les branches qui conviennent.

b. À l'aide de l'arbre, calculer la probabilité de l'évènement « obtenir un menu du jour composé de poisson et de gratin ».

c. Calculer la probabilité de l'évènement « obtenir un menu du jour composé de viande et de riz ».

38 On lance deux dés tétraédriques, équilibrés et non truqués, dont les faces sont numérotées de 1 à 4. On calcule la somme des nombres lus sur chacune des faces sur lesquelles reposent les dés.

1 000 lancers sont simulés avec un tableur. Le graphique ci-contre représente la fréquence d'apparition de chaque somme obtenue.



1. a. Par lecture graphique, donner la fréquence d'apparition de la somme 3.

b. Lire la fréquence d'apparition de la somme 1. Justifier cette fréquence.

2. a. Décrire les lancers de dés qui permettent d'obtenir une somme égale à 3.

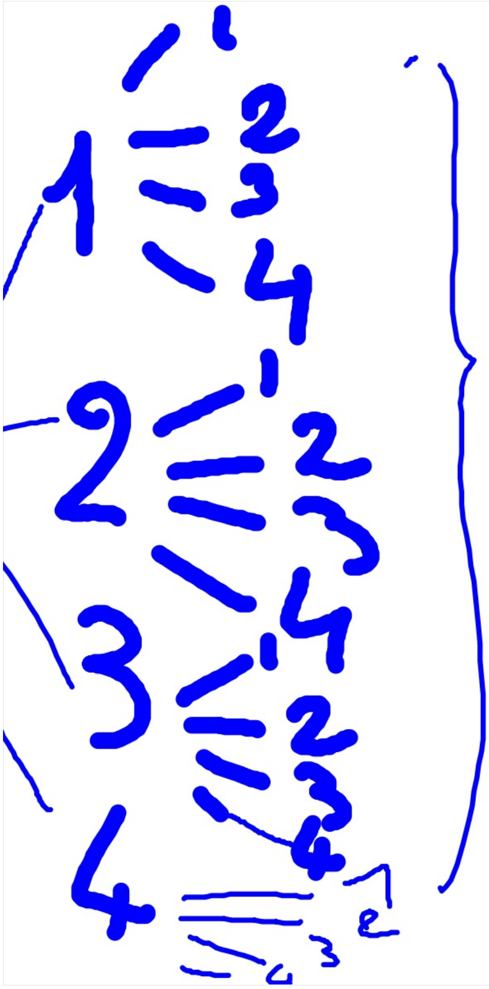
b. En déduire la probabilité d'obtenir la somme 3 (exprimer cette probabilité en pourcentage). Expliquer pourquoi ce résultat est différent de celui obtenu à la question **1.a.** *D'après Brevet 2015.*

p 229

1.a) $f_3 = 15\%$

b) $f_1 = 0\%$

2. a) dé n°1 = 2 | dé n°1 = 1
dé n°2 = 1 | dé n°2 = 2



16 issues au total
2 sont favorables.

$p=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$

27 Jeu TV

MODÉLISER à l'aide d'un arbre.

p 227

Dans un jeu télévisé, les candidats passent deux épreuves.

1re épreuve Le candidat est face à 5 portes : une porte donne accès à la *salle du trésor* ; les autres à la *salle de consolation*.

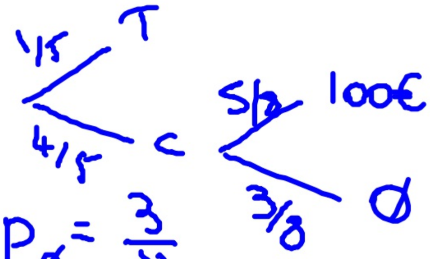
$\rightarrow P_C=\frac{4}{5}$

2e épreuve Dans la salle, le candidat doit choisir une boite parmi 8 :

– dans la *salle du trésor*, 1 boite contient 1 000 €, 5 boites 200 € chacune et les autres 100 € chacune ;

– dans la *salle de consolation*, 5 boites contiennent 100 € et les autres sont vides.

$\rightarrow P_Ø=\frac{3}{8}$



a. Quelle est la probabilité qu'un candidat se retrouve dans la salle du trésor ?

$p=\frac{1}{5}$

b. Un candidat accède à la salle du trésor. Modéliser la situation par un arbre, puis calculer la probabilité qu'il gagne au moins 200 €.

$p=\frac{1+5}{8}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ (:2)

c. Un autre candidat est sélectionné. Quelle est la probabilité qu'il ne gagne rien ?

D'après Brevet 2015.

$$P = \frac{\cancel{4}^{1}}{5} \times \frac{3}{\cancel{8}_{2}} = \frac{3}{10}$$