PROBABILITÉS

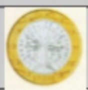
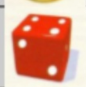
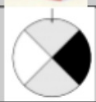
I) Expérience aléatoire, issues et évènements

1. Expérience aléatoire et issues

Définition : Une ***expérience*** est dite ***aléatoire*** lorsqu'elle a plusieurs résultats ou ***issues*** possibles et que l'on ne peut pas prévoir avec certitude quelle issue se produira.

Vocabulaire :

- *Expérience aléatoire : cela correspond à la description de la situation étudiée*
- *Les issues : cela correspond aux résultats envisagés de l'expérience aléatoire*

		Description des expériences aléatoires	Liste des issues possibles :
1		On lance une pièce de monnaie équilibrée et on regarde sa valeur supérieure.	pile ; face
2		On lance un dé équilibré à 6 faces et on regarde le nombre de points inscrits sur sa face supérieure.	1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6
3		On fait tourner une roue de loterie équilibrée, on attend qu'elle se stabilise et on regarde la couleur désignée par la flèche.	secteur noir, blanc, gris, gris

2. Evénements

Définition : Un ***évènement*** est une condition qui peut être ou ne pas être réalisée lors de l'expérience.
Un évènement peut être réalisé par **aucune, une ou plusieurs issues** de l'expérience aléatoire.
Un évènement réalisé par **une seule issue** est appelé **évènement élémentaire**.

Exp. aléatoire	Evènement élémentaire	Evènement non élémentaire
2	"obtenir 2"	"obtenir un nombre impair"
3	"obtenir blanc"	"obtenir gris"

10 Dans chaque cas, dire s'il s'agit ou non d'une expérience aléatoire.

p 212

a. Jouer au loto. ✓

b. Répondre à un QCM. ∅

c. Tirer au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. ✓

d. Tirer au hasard une perle dans un sachet ne contenant que des perles noires. ∅

11 Yann joue au *Scrabble*. Il pioche un jeton.

On considère les évènements suivants :

- V : « La lettre est une voyelle. »
- P : « La lettre figure dans son prénom. »
- R : « La lettre figure deux fois dans son prénom. »

▶ Citer toutes les issues qui constituent chacun des évènements V, P et R.

p 212

V : jetons A, E, I, O, U, Y.

P : jetons Y, A, N

R : jeton N.

12 On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes

p 212

1.a) Roi ♥, Roi ♠, Roi ♣, Roi ♦

b) 7♣, 8♣, 9♣, 10♣, V♣, D♣, R♣, As♣.

1. Quelles sont les issues qui constituent :

a. l'évènement A : « La carte est un roi » ?

b. l'évènement B : « La carte est un trèfle » ?

2. Que peut-on dire de l'évènement « La carte est un 3 » ?

II) Probabilité d'un évènement

1. Définition

La probabilité d'un évènement est la « **proportion de chance** » que cet évènement se réalise.

Définition : Lorsqu'on effectue ***un très grand nombre de fois*** une expérience aléatoire de façon ***indépendante*** et dans les ***mêmes conditions***, la ***fréquence*** de réalisation d'un événement E se rapproche d'une valeur appelée ***probabilité*** de l'événement. Elle se note $p(E)$.

3. Propriétés

Propriétés : ① La **probabilité** d'une issue est un **nombre compris entre 0 et 1**

② La **somme des probabilités** de toutes les issues d'une expérience aléatoire est **égale à 1**.

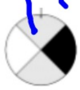
Remarque : une probabilité peut s'exprimer sous forme d'écriture décimale, fractionnaire, de pourcentage

4. Situation d'équiprobabilité

Définition : Lorsque **chaque issue** d'une expérience aléatoire **a la même probabilité** de se réaliser on dit que la situation est **équiprobable** ou qu'il y a **équiprobabilité**.

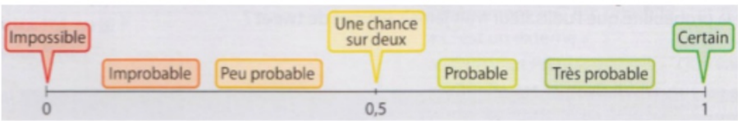
Propriété : Dans une expérience aléatoire où il y a **équiprobabilité**, la probabilité d'un événement est égale au quotient : $\dfrac{Nombre\ d'issues\ réalisant\ l'événement}{Nombre\ total\ issues\ de\ l'expérience}$

Exp. aléatoire	Évènement	Probabilité de l'évènement
1	Évènement A : Obtenir pile	$p(A)=\frac{1}{2}$
2	Évènement B : Obtenir 6	$p(B)=\frac{1}{6}$
3	Évènement C : Obtenir gris	$p(C)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

III) Evènements et probabilités associées

1. Évènement certain, évènement impossible



Propriétés :
- La **probabilité** d'un événement **impossible** est égale à **0**
- La **probabilité** d'un évènement **certain** est égale à **1**

2. Evènements incompatibles

Définition : On dit que deux évènements sont **incompatibles** s'ils **ne peuvent pas se réaliser en même temps.**

Propriété : Si deux évènements A et B sont **incompatibles** alors $p(A\ ou\ B)=p(A)+p(B)$

3. Evénements contraires

Définition : **L'évènement contraire d'un évènement A** est l'évènement qui se réalise lorsque A n'est pas réalisé. On le note $\acute{A}$ (lire « non A » ou « A barre).

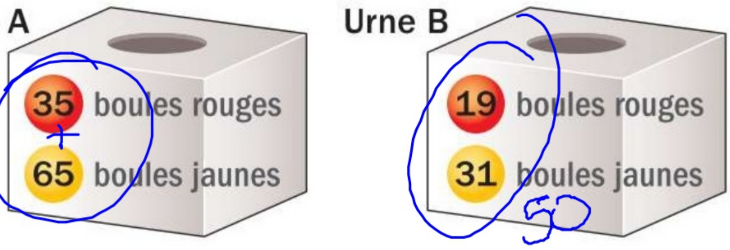
Propriété : La somme des **probabilités** d'un **évènement et son contraire** est égale à **1** : $p(A)+p(\bar{A})=1$

Exp. aléatoire	2	3
Liste des issues	1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6	secteur noir, blanc, gris, gris
Evènement certain et probabilité	obtenir un nombre $p=1$	obtenir une couleur : $p=1$
Evènement impossible et probabilité	obtenir 7 $\rightarrow p=0$	obtenir rouge : $p=0$
Evènements incompatibles et probabilités associées	A : « obtenir 1" $p(A)=\frac{1}{6}$ B : « obtenir 3" $p(B)=\frac{1}{6}$ A ou B : « obtenir 1 ou 3" $p(A\,ou\,B)=p(A)+p(B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}$	C : « obtenir noir" $p(C)=\frac{1}{4}$ D : « obtenir blanc" $p(D)=\frac{1}{4}$ C ou D : « obtenir noir ou blanc" $p(C\,ou\,D)=p(C)+p(D)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}$
Evènements contraires et probabilités associées	E : « obtenir 2" $p(E)=\frac{1}{6}$ $\bar{E}$: « ne pas obtenir 2" $p(\bar{E})=1-p(E)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$	F : « obtenir noir" $p(F)=\frac{1}{4}$ $\bar{F}$: « ne pas obtenir noir" $p(\bar{F})=1-p(F)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

18 Deux urnes contiennent des boules indiscernables au toucher. On choisit une des deux urnes et on tire une boule au hasard. On gagne si la boule obtenue est rouge.

p 212

Urne A   Urne B



100   50

▶ Est-il vrai qu'on a plus de chances de gagner en choisissant l'urne B ? Justifier.

D'après Brevet 2015.

p("obtenir rouge avec A") $= \frac{35}{100} = 35\%$

p("obtenir rouge avec B") $= \frac{19}{50} \underset{\times 2}{=} \frac{38}{100} = 38\%$

donc vrai.

2 Pour chaque évènement cité, décrire toutes les issues qui le constituent. Indiquer, le cas échéant, s'il est impossible ou certain.

a. On lance un dé cubique non truqué à 6 faces numérotées de 1 à 6.
- Évènement A : « Obtenir un numéro inférieur à 4. »
- Évènement B : « Obtenir un numéro supérieur ou égal à 5. »
- Évènement C : « Obtenir un numéro égal à 7. »

b. On place des jetons dans un sac. Une lettre de l'alphabet est inscrite sur chaque jeton. On choisit au hasard un jeton dans le sac.
- Évènement D : « Obtenir une voyelle. »
- Évènement E : « Obtenir une voyelle ou une consonne. » → tous les jetons ⇒ p=1 certain.

→ Exercices p 209

A : faces 1, 2 et 3 ⇒ $p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

B : faces 5, 6 ⇒ $p(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

C : évènement impossible ⇒ $p(C) = 0$.

b) D : jetons A, E, I, O, U, Y ⇒ $p(D) = \frac{6}{26}$

13 Pour financer une sortie, un collège organise une loterie : on tire au hasard 1 ticket dans un sac qui en contient 180.

13 p 224

1. À l'aide du tableau des gains suivant, calculer le nombre de billets perdants. $180 - 120 = 60$

Gain	Nombre de tickets
Lecteur MP3	4
Grosse peluche	+ 12
Petite peluche	+ 36
Clé USB	+ 68
	120

40

80

2. Calculer la probabilité :

a. de gagner un lecteur MP3 ; $\frac{4}{180}$

b. de gagner une peluche ; → $\frac{12+36}{180} = \frac{48}{180}$

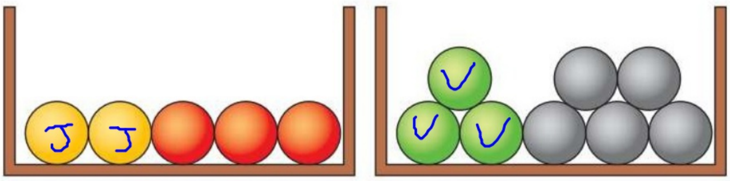
c. de ne rien gagner. → $\frac{60}{180} = \frac{1}{3}$

22 p 214

CALCULER avec différentes procédures.

Mia et Kad ont chacun une boite contenant des boules colorées. Chacun d'eux tire une boule dans sa boite, sans regarder.
Mia gagne si elle tire une boule jaune et Kad gagne s'il tire une boule verte.

Boite de Mia **Boite de Kad**

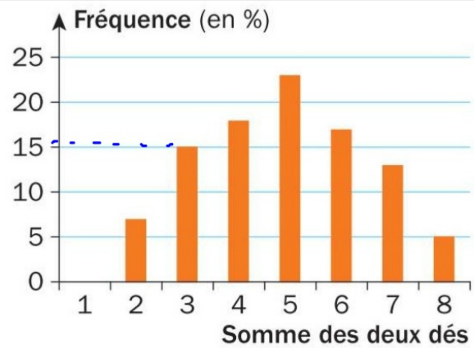


▸ Qui a le plus de chances de gagner ?

$p(\text{"Kad gagne"}) = \frac{3}{8} \xrightarrow{\times 5} \frac{15}{8\times5} = \frac{15}{40}$

$p(\text{"Mia gagne"}) = \frac{2}{5} \xrightarrow{\times 8} \frac{16}{5\times8} = \frac{16}{40}$

38 On lance deux dés tétraédriques, équilibrés et non truqués, dont les faces sont numérotées de 1 à 4.
On calcule la somme des nombres lus sur chacune des faces sur lesquelles reposent les dés.
1 000 lancers sont simulés avec un tableur. Le graphique ci-contre représente la fréquence d'apparition de chaque somme obtenue.



1. a. Par lecture graphique, donner la fréquence d'apparition de la somme 3. 15%

b. Lire la fréquence d'apparition de la somme 1. Justifier cette fréquence. 0%

2. a. Décrire les lancers de dés qui permettent d'obtenir une somme égale à 3.

b. En déduire la probabilité d'obtenir la somme 3 (exprimer cette probabilité en pourcentage).
Expliquer pourquoi ce résultat est différent de celui obtenu à la question **1.a.** *D'après Brevet 2015.*

p 217

2. a) dé 1 → face 1 | dé 1 → face 2
dé 2 → face 2 | dé 2 → face 1

b) $p(\text{"obtenir 3"}) = \frac{2}{16} = 2 : 16 = 0{,}125 \xrightarrow{\times 100} 12{,}5\,\%$

Experience Aleatoire, Arbre des Possibles et Probabilites

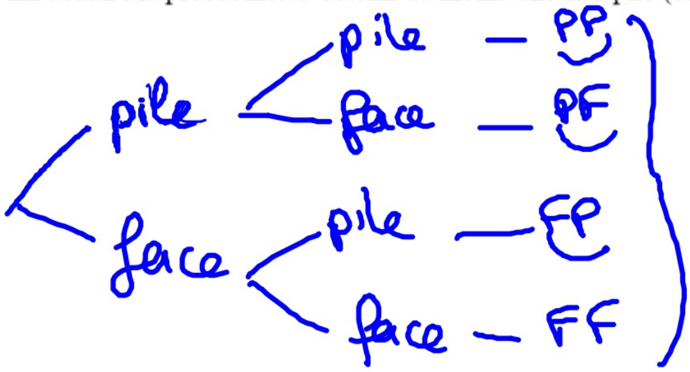
Analyse du film

Répondre au questionnaire suivant :

1. Décrire l'expérience aléatoire proposée à Alan Turing

2. Lister les différentes issues (résultats) que peut obtenir Alan Turing après les deux lancers de la pièce

3. Dessiner l'illustration de la vidéo permettant de modéliser les deux tirages de la pièce de monnaie.
   On appelle ce modèle un **arbre des possibles**
   En déduire la probabilité d'obtenir au moins une fois pile (cet évènement sera noté P)



$p = \frac{3}{4}$

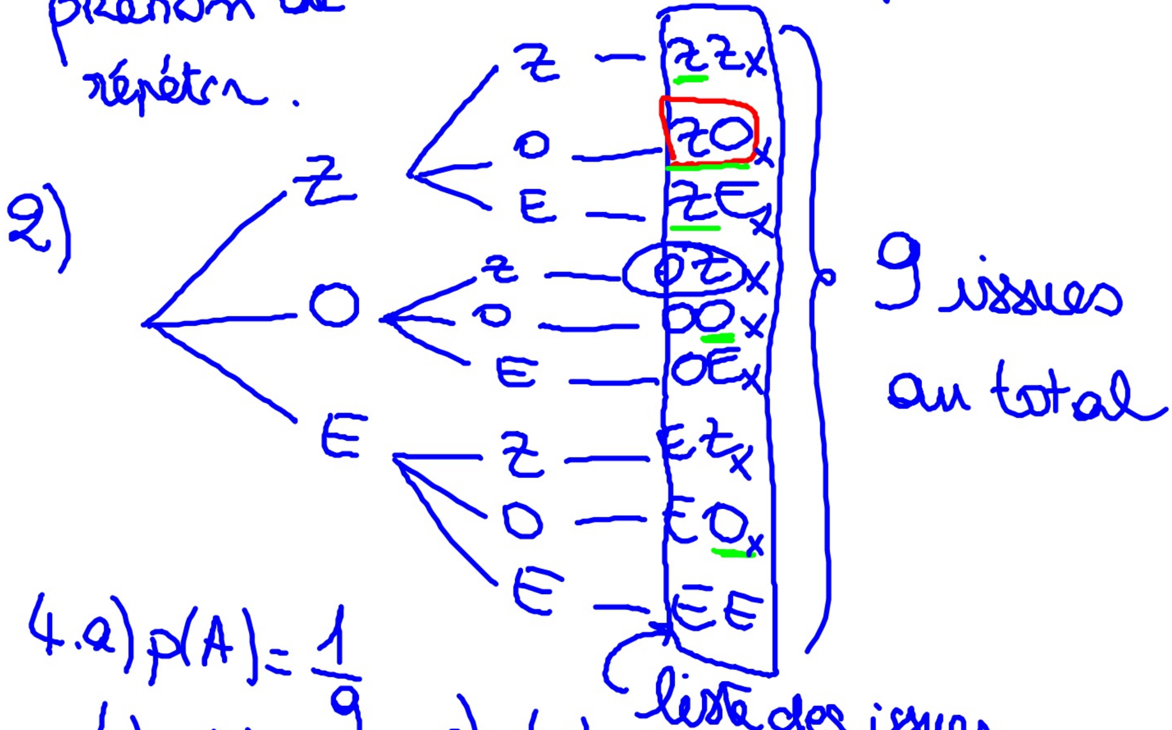
4. Déduire, de cet arbre les probabilités suivantes :

• F : « obtenir au moins une fois face »	• PF : « obtenir une fois pile, une fois face »
• PP : « obtenir deux fois pile »	• FF : « obtenir deux fois face »

$p(F) = \frac{3}{4}$; $p(PF) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; $p(PP) = \frac{1}{4}$; $p(FF) = \frac{1}{4}$

1) Choisir au hasard 2 lettres dans le prénom de Zoé. Ces lettres peuvent se répéter.

2)



4.a) $p(A) = \frac{1}{9}$

b) $p(B) = \frac{1}{9}$ c) $p(C) = \frac{5}{9}$ d) $p(D) = \frac{8}{9}$

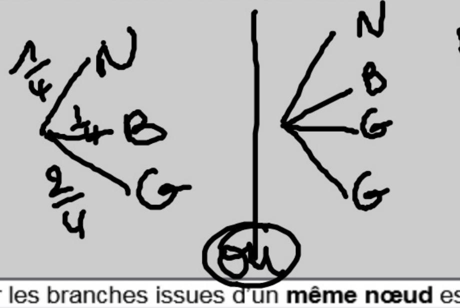
IV) Arbre des probabilités

Pour représenter une expérience aléatoire, on peut construire un **arbre des probabilités.**

- A l'issue de chacune des branches de l'arbre on note une des **issues** possibles : c'est un **nœud** de l'arbre.
- Au-dessus de la **branche** on note la **probabilité** associée.

Un **chemin** est une suite de branches.

Dans l'expérience aléatoire 3, soit N, G et B les évènements respectifs « obtenir un secteur Noir », « obtenir un secteur Gris » et « obtenir un secteur blanc »



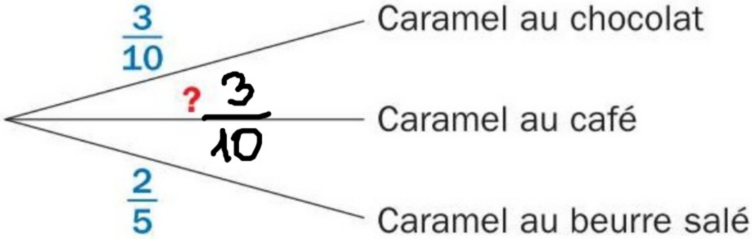
$p(N) = \frac{1}{4}$

$p(B) = \frac{1}{4}$

$p(G) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Propriété : La **somme des probabilités** portées sur les branches issues d'un **même nœud** est égale à **1**

2 **a.** Recopier et compléter l'arbre de probabilité suivant.



b. Décrire précisément une expérience aléatoire qui pourrait correspondre à cet arbre.

$$\frac{3}{10} + ? + \frac{2}{5} = 1$$

$$\frac{3}{10} + \frac{?}{10} + \frac{4}{10} = \frac{10}{10}$$

$? = 3$

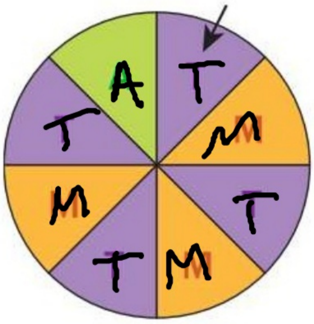
p 221

3 chocolat + 3 café + 4 beurre salé

10 caramels

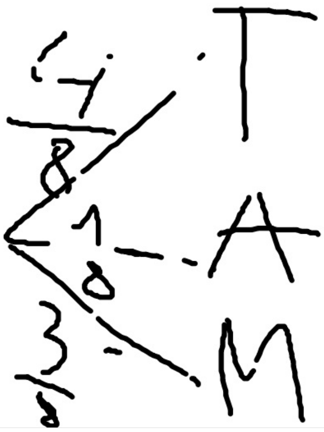
on pioche au hasard 1 caramel.

3 On fait tourner la roue de loterie ci-contre, sur laquelle tous les secteurs ont la même aire.



▶ Représenter l'arbre de probabilité qui modélise cette expérience en indiquant sur chaque branche la probabilité de l'issue correspondante.

p 221



20 p 214

Dans un restaurant, au menu, le chef propose aux clients :

– deux entrées : salade (S) ou charcuterie (C) ;

– trois plats : viande (V) ou poisson (P) ou lasagnes (L) ;

– deux desserts : fruits (F) ou mousse au chocolat (M) ;

1. a. Reproduire l'arbre suivant et le compléter pour obtenir tous les menus possibles.

b. Combien de menus différents le chef peut-il servir aux clients ?

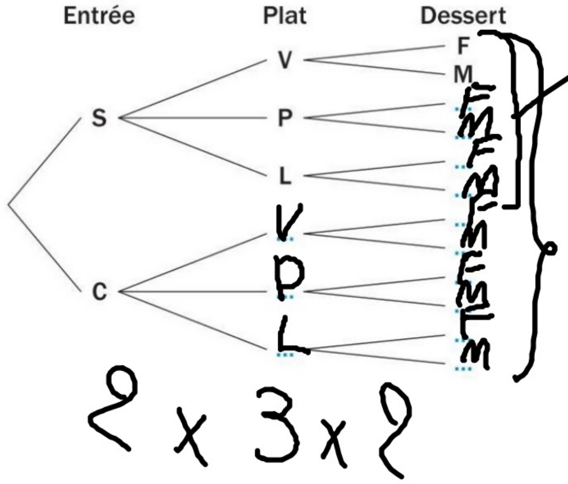
2. Quelle est la proportion de menus possibles comportant :

a. une salade ?

b. une mousse au chocolat ?

c. du poisson ?

d. à la fois des lasagnes et des fruits ?



2.a) $\frac{1}{2} = \frac{6}{12}$

b) $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

37 On place des boules indiscernables au toucher dans un sac. Sur chaque boule colorée est inscrite une lettre. Le tableau ci-dessous présente la répartition des boules.

Lettre \ Couleur	Blanc	Bleu	Rouge
A	3	5	2
B	2	2	6

1. Combien y a-t-il de boules dans le sac ?

2. On tire une boule au hasard.

a. Calculer la probabilité de tirer une boule bleue portant la lettre A.

b. Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ?

c. A-t-on autant de chances de tirer une boule portant la lettre A qu'une boule portant la lettre B ?

D'après Brevet 2014.

p 229

1. $\underbrace{3+5+2}_{10} + \underbrace{2+2+6}_{10} = 20$

2.a) $p(\text{"bleue A"}) = \frac{5}{20} = \frac{\cancel{5}\times 1}{\cancel{5}\times 4} = \frac{1}{4}$

b) $p(\text{"Rouge"}) = \frac{2+6}{20} = \frac{8}{20} = \frac{\cancel{2}\times 4}{\cancel{2}\times 10} = \frac{4}{10} = \frac{\cancel{2}\times 2}{\cancel{2}\times 5} = \frac{2}{5}$

c) $p(A) = \frac{10}{20} = p(B) = \frac{1}{2}$

36 On dispose de 10 cartons sur lesquels on a écrit chacune des lettres du mot DIMENSIONS.
On prélève au hasard un carton et on note la lettre inscrite.

a. Calculer la probabilité de l'évènement A : « La lettre est une voyelle. »

b. Énoncer l'évènement contraire de l'évènement A, puis calculer sa probabilité.

c. Calculer la probabilité de l'évènement B : « La lettre fait partie du mot MATHS. »

d. Les évènements A et B sont-ils incompatibles ? Justifier.

p 229

D I M E N

S I O N S

a) $p(A) = \frac{4}{10} = \frac{2 \times 2}{2 \times 5} = \frac{2}{5}$

$p(\overline{A}) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 1 - \frac{2}{5}$

b) $p(B) = \frac{3}{10}$

c) NON

19 On lance deux dés cubiques à 6 faces, puis on calcule le produit des deux nombres obtenus.

a. Reproduire et compléter le tableau suivant pour déterminer les issues possibles.

p 225

2ᵉ dé \ 1ᵉʳ dé	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	$\boxed{16}$	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

$6 \times 6 = 36$ résultats

$p(D) = \frac{1}{36}$

b. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants.

- A : « Obtenir un produit égal à 35. » → $p(A) = 0$ → impossible
- B : « Obtenir un produit au moins égal à 1. » → $p(B) = \frac{36}{36} = 1$ → certain
- C : « Obtenir un produit égal à 10. » → $p(C) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$
- D : « Obtenir un produit égal à 16. »

c. Comment qualifie-t-on l'évènement A ?
Et l'évènement B ?